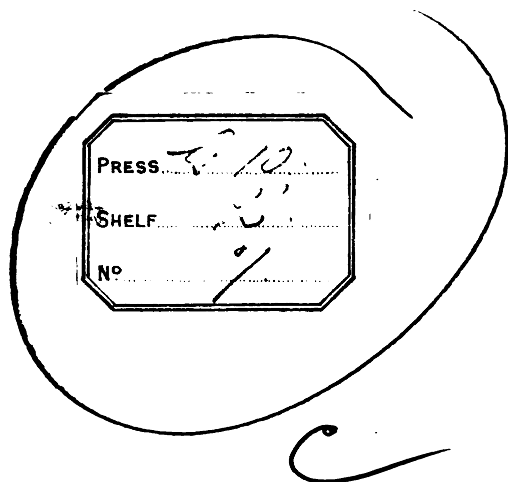
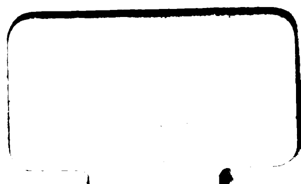




PRESS
SHELF
Nº



GRUNDRISS

DER

DIOPTRIK

GESCHICHTETER LINSENSYSTEME.

MATHEMATISCHE EINLEITUNG IN DIE DIOPTRIK DES MENSCHLICHEN AUGES



VON

Dr. LUDWIG MATTHIESSEN,

ORD. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT ZU ROSTOCK.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1877.

Vorwort.

Die Dioptrik des Auges bildet anerkanntermassen die theoretische Grundlage der physiologischen Optik und zwar in ihren folgenden drei Hauptproblemen:

1) der Untersuchung des Weges eines Lichtstrahles durch eine beliebige Anzahl von hintereinander geschichteten centrirten brechenden Kugelflächen von verschiedenem Brechungsvermögen, sowie der Untersuchung über den Ort, die Grösse und Deutlichkeit der Bilder von äusseren Objecten;
2) der directen und indirecten Messung des Brechungsvermögens sämmtlicher vom Lichtstrahl getroffenen Augenmedien;
3) der Auswerthung der inneren Dimensionen des Auges, sowie der Krümmungen der brechenden Schichten — Ophthalmometrie.

Der Grundriss der Dioptrik zerfällt demzufolge in zwei Hauptabschnitte: die Dioptrik geschichteter Linsensysteme und die Dioptrik des menschlichen Auges. Zu der Abfassung und Veröffentlichung desselben ist der Verf. besonders durch drei Beweggründe geführt worden.

Erstlich sind die Fortschritte in dem Studium des menschlichen Auges rücksichtlich der theoretischen Grundlagen wesentlich bedingt durch das vorhandene Mass der Ausbildung der mathematischen Theorie. Diese wird wesentlich gefördert durch eine möglichst allseitige Theilnahme der angewandten Mathematik an diesen Problemen. In unseren besten Werken über physiologische Optik nimmt die Dioptrik der geschichteten Linsensysteme nur die Stellung einer Hülfswissenschaft ein und pflegt nur so weit abgehandelt zu werden, als sie dem Grade der Ausbildung der Kenntniss von den Gesetzen des deutlichen Sehens, der Lichtempfindung und der Gesichtswahrnehmungen Rechnung trägt. Indess wird noch gänzlich vermisst die Dioptrik der geschichteten Krystalllinse, indem nach dem Vorgange von Listing für dieselbe eine ideelle Linse von einem totalen oder imaginären Brechungsvermögen substituirt wird. Im Uebrigen ist nun zwar die Lösung des allgemeinen dioptrischen Problems auf ausserordentlich einfache Principien gestützt, seitdem von Möbius (1830) und Listing (1845) die Knotenpuncte, von Gauss (1841) die Hauptpuncte und Hauptbrennweiten eingeführt sind. Durch Töpler (1871) ist die Zahl der Cardinalpuncte um vier andere vermehrt worden. Die hervorragende Seite der Gauss'schen Abhandlung aber, die allgemeine Darstellung des Ortes der Cardinalpuncte dioptrischer

Systeme in Form von gewissen Kettenfunctionen ist wegen des schwierigen Verständnisses jener classischen Arbeit fast unbeachtet geblieben und nur v. Zehender verwendet sie in seinem schönen Werke: Anleitung zum Studium der Dioptrik des menschlichen Auges. Erlangen 1856. Jene Gauss'schen Functionen einem grösseren wissenschaftlichen Publicum in elementarer Darstellung zum Verständniss zu bringen und die bis jetzt gebräuchlichen Näherungsmethoden durch allgemeine Methoden zu ersetzen, ist eine der Aufgaben dieses Werkes. Ausserdem sind die vier Töpler'schen Fundamentalpuncte sowie die Symptosen von Listing in die Untersuchung hereingezogen und durch verschiedene neu aufgestellte Theoreme wichtige Gesichtspuncte eröffnet worden.

Das zweite Motiv zur Abfassung des Werkes war die noch immer mangelhafte Kenntniss des Brechungsvermögens der verschiedenen Augenmedien, von denen bis jetzt nur eine sichere Bestimmung der Indices der flüssigen Medien, sowie eine indirecte Bestimmung des Totalindex der heterogenen geschichteten Krystalllinse den dioptrischen Untersuchungen zu Grunde gelegt worden sind. Verf. hat sich bemüht, mittels des Abbe'schen Refractometers nicht blos die bis dahin unbekannten Brechungsindices der Häute, sondern auch der Schichten der Krystalllinse im Auge des Menschen und verschiedener Thiere zu messen und die Gleichung der Brechungsindices innerhalb dieses wichtigsten dioptrischen Apparates empirisch festzustellen. Es darf jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass die Messungen an der Linse in Gemeinschaft mit Herrn Prof. H. Aubert ausgeführt worden sind und dass Verf. besonders durch ihn zu tiefern Studien auf diesem Gebiete lebhaft angeregt worden ist.

Ein drittes Motiv für den Verf. war die Gewinnung von Integralen für die Coordinaten der Cardinalpuncte der geschichteten Krystalllinse, also eines dioptrischen Systems von continuirlich variabler Dichtigkeit. An die Stelle zeitraubender Näherungsmethoden lassen sich einfache Integrale setzen, deren Constanten durch unschwer ausführbare Messungen bestimmt werden. Als weitere Resultate der analytischen Untersuchungen möge gestattet sein, noch speciell hervorzuheben der Nachweis des Aplanatismus der normalen Hornhaut für die Entfernung des deutlichen Sehens, die directe Berechnung des Brechungsindex des Kerncentrums der Linse sowie ihres totalen Brechungsvermögens aus den Dimensionen des Auges von Menschen und Thieren, und endlich die Bestimmung der Gleichung der Trajectorie eines Lichtstrahles innerhalb der geschichteten Krystalllinse.

Rostock im October 1876.

Ludwig Matthiessen.

Inhalt.

I. *Von der Brechung der Lichtstrahlen in einem Systeme hintereinander geschichteter centrirter sphärischer Flächen.*

II. *Von der Brechung der Lichtstrahlen im normalen menschlichen Auge.*



I. Von der Brechung der Lichtstrahlen in einem Systeme centrirter sphärischer Flächen.

Das allgemeine dioptrische Problem. Das theoretische Fundament der Dioptrik des Auges besteht in der Lösung des allgemeinen dioptrischen Problemes, d. h. in der mathematischen Untersuchung des Weges, den Lichtstrahlen beschreiben, welche von einem leuchtenden Puncte ausgehend ein System von durchsichtigen Medien verschiedener optischer Dichtigkeit und Krümmung ihrer gegen eine gemeinsame Axe normal gerichteten Oberflächen durchsetzen. § 1.

Um zu möglichst einfachen der elementar-geometrischen Anschauung leicht zugänglichen Beziehungen zwischen dem Anfang und Ende dieser Bahnen zu gelangen, gehen wir auf dem von Gauss vorgezeichneten Wege von gewissen den in Betracht kommenden Verhältnissen entsprechenden einfachen Prämissen aus, die zwar dem mit den physikalischen Grundlehren Vertrauten bekannt genug sind, aber doch zur Begründung der hier zu entwickelnden Theorie einer genauen Feststellung bedürfen.

Die hier in Betracht kommenden Systeme durchsichtiger Medien bestehen zumeist in einer in gerader Richtung fortlaufenden cylindrischen Schichtung von Luft und Glas, wie bei den künstlichen dioptrischen Instrumenten, oder von Luft und theils wässrigen, theils gallertartigen Flüssigkeiten, wie bei dem Gesichtssinne. In diesen Fällen sind die Trennungsflächen der hintereinander liegenden Medien ebenmässig gekrümmte Flächen, so dass man aus analytisch-geometrischen Gründen berechtigt ist, verhältnissmässig kleine Theile derselben, als Segmente von Kugelflächen anzusehen, denen in dem von einem unendlich dünnen Lichtbüschel getroffenen Puncte ein bestimmter Krümmungsradius zugeschrieben werden muss. Die Flächen, durch welche je zwei der hintereinander liegenden Medien getrennt sind, heissen *brechende Flächen* und diejenigen Puncte derselben, welche von einer durch sämmtliche Medien gezogenen geraden Axe getroffen werden, die *Scheitelpuncte* der Flächen. Es seien XX_1 (Fig. 1) die

Axe des Systems, $S_1, S_2 \ldots S_5$ die Scheitelpuncte, $C_1, C_2 \ldots C_5$ die zugehörigen Krümmungsmittelpuncte der brechenden Flächen, M_0 und

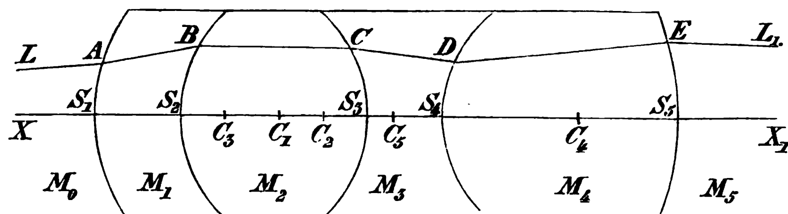


Fig. 1.

M_5 die äussern Medien, $M_1, M_2 \ldots M_4$ die inneren Medien, endlich die gebrochene Linie $L\,L_1$ der Weg des durchgehenden Lichtstrahles.

Zu einer einfachen Lösung der vorgestellten Aufgabe gehen wir nach dem Vorgange von Gauss von folgenden Voraussetzungen aus:

1. Die Krümmungsmittelpuncte der die Axe umgebenden Flächenelemente liegen sämmtlich in der Axe $X X_1$ (centrirtes System) und die Flächen selbst sind Kugelflächen.

2. Denken wir uns durch die Axe und die Durchschnittspuncte des Lichtstrahles mit den einzelnen Flächen Ebenen (Axenschnitte) gelegt, so wird vorausgesetzt, dass die zwischen den Scheitelpuncten und den Durchschnittspuncten gelegenen Kreisbögen gegen die zugehörigen Krümmungsradien sehr klein sind, so dass man für die Sinus und Tangenten der von der Axe und den Radien eingeschlossenen Winkel diese selbst oder ihre Bogen, für die Cosinus aber die Einheit setzen darf. Hiernach reduciren sich also die Reihen

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$\tan x = \frac{x}{1} + \frac{2x^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots.$$

in erster Annäherung auf die Gleichungen

$$\sin x = x,\ \tan x = x,\ \cos x = 1.$$

3. Die Winkel, unter welchen sämmtliche Theile des in den einzelnen Medien gebrochen verlaufenden Lichtstrahles sich mit der Axe kreuzen, sind ebenfalls der vorbenannten Annahme unterworfen.

4. Die Medien selbst sind sogenannte isotrope Körper, d. h. solche, in welchen die von einem leuchtenden Puncte ausgehenden Lichtwellen sich nur in Kugelflächen fortpflanzen oder in welchen sich ebene Wellen parallel zu einander in der auf ihrer Ebene senkrechten Richtung fortbewegen.

In jedem isotropen Mittel bewegt sich die von ihrem Erregungsmittelpuncte ausgehende Lichtwelle mit einer constanten Geschwin-

digkeit fort, welche der optischen Dichtigkeit des Mittels umgekehrt proportional ist. Die gerade Verbindungslinie des Erregungsmittelpunctes einer Wellenbewegung in einem isotropen Medium mit einem Puncte der Oberfläche ist der geometrische Ort aller aneinanderliegenden Aethermolecüle, durch welche die Elementarwelle sich fortpflanzt und wird *Lichtstrahl* genannt. Unter den Wellenflächen versteht man dann diejenigen continuirlichen Flächen, welche alle Aethermolecüle verbinden, welche in irgend einem bestimmten Zeitmomente in gleicher Schwingungsrichtung oder Phase begriffen sind. Diese Flächen sind offenbar Kugelflächen. Werden diese Kugelflächen unendlich gross, so nähern sie sich der Ebene, gegen welche die Lichtstrahlen ebenfalls senkrecht gerichtet sind, wie gegen die Kugelfläche.

Geht die Wellenbewegung des Lichts von einem beliebigen Puncte aus, sind also die Wellenoberflächen sphärisch, so breitet sich die Welle auf eine immer grössere Fläche aus. Ein Complex von zusammenliegenden gleich weit vom Centrum entfernten Aethermolecülen gehört derselben Oberfläche an und bildet ein Element derselben. Jedes solches Element beschreibt in einer endlichen Zeit einen geraden abgestumpften Kegel. Den Strahlencomplex, welcher sämmtliche Puncte der Endflächen des abgestumpften Kegels oder auch sämmtliche Puncte (Aethermolecüle) der einen Basis mit dem Centrum verbindet, nennt man *Strahlenbüschel* oder *Lichtkegel* (homocentrische Strahlen). Ist die Wellenoberfläche eine Ebene, so beschreibt jedes Element derselben in einer endlichen Zeit einen geraden Cylinder; die von demselben eingeschlossenen Strahlen sind untereinander parallel. Man kann einen solchen *Strahlencylinder* als einen Strahlenkegel ansehen, dessen Scheitel im Unendlichen liegt.

Nach der Erfahrung tritt nun eine neben der stattfindenden Bewegungsrichtung rückwärts gehende Wellenbewegung nie ein, so dass z. B. bei der schiefen Reflexion eines Lichtkegels an einem durchsichtigen Körper niemals eine rückwärts durch diesen gehende Strahlung beobachtet wird. Es können demnach Strahlenkegel auftreten, welche nicht einen physischen, sondern nur einen geometrischen Divergenz- oder Strahlpunct haben. Man pflegt beide Arten von Strahlpuncten zu unterscheiden als *reelle* und *imaginäre Strahl-* oder *Lichtpuncte*. Der fehlende Theil ist im letzten Falle die blinde Verlängerung des Strahlenkegels. Es kommen jedoch Strahlenkegel vor, in welchen die Lichtbewegung in umgekehrter Richtung gegen den Convergenzpunct vor sich geht (*Brennpuncte*). Hierbei sind in gleicher Weise *reelle* und *imaginäre Brennpuncte* zu unterscheiden.

Unter den oben angeführten Voraussetzungen gelingt es nun ohne schwierige Kunstgriffe des Calcüls zu einer überaus einfachen Lösung des dioptrischen Problems zu gelangen. Wir gehen dabei von den allgemeinen Erfahrungssätzen des Verhaltens ebener Licht-

wellen, welches dieselben, mögen sie messbar oder unmessbar klein sein, beim Auftreffen auf ebene Begrenzungsflächen verschiedener Medien zeigen. Die bei der Lösung des allgemeinen dioptrischen Problems in Betracht kommenden Modificationen der Lichtbewegung bestehen in der Spiegelung (Reflexion), Brechung (Refraction) und Farbenzerstreuung (Dispersion). Wenn auch in Folge der besonderen geometrischen und physischen Beschaffenheit des Gesichtssinnes kleine Abweichungen von der obigen Voraussetzung der Kugelgestalt der brechenden Flächen und in Folge der eigenthümlichen Construction der Krystalllinse Erscheinungen der Doppelbrechung, Polarisation und Fluorescenz auftreten, so sind diese doch nur von untergeordneter Bedeutung und ohne Einfluss auf die dioptrischen Formeln.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Gesetze, welches ebene Lichtwellen oder Strahlencylinder bei ihrer Spiegelung und Brechung an der *ebenen* Grenzfläche zweier Medien befolgen. Auf diesen besonderen Fall lässt sich die Betrachtung sphärischer Wellen oder der homocentrischen Strahlenbüschel beim Auftreffen auf beliebig gekrümmte Grenzflächen nach bekannten Principien der analytischen Geometrie leicht zurückführen. Die Gesetze der Farbenzerstreuung des weissen Lichtes sind in denen der Brechung mit enthalten und finden in einem besonderen Abschnitte Berücksichtigung.

§ 2. **Die Gesetze der Spiegelung und Brechung in isotropen Medien.** Zur Ableitung dieser Gesetze für Strahlencylinder genügt es, zwei einfache Strahlen derselben in Betracht zu ziehen und zwar zwei solche, welche mit den Normalen der Incidenzpuncte in einer und derselben Ebene liegen. Es sei SP (Fig. 2) ein einfacher Strahl, P sein Incidenzpunct und PM die Normale des Punctes P auf der

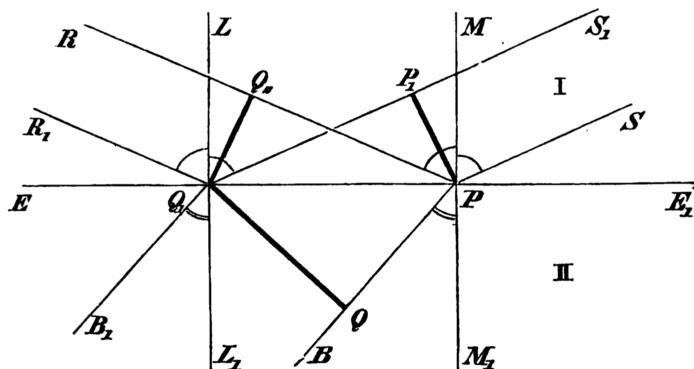


Fig. 2.

Ebene EE_1. Wir legen durch den Strahl und die Normale PM des Flächenelements P der Trennungsfläche die Ebene SPE und stellen uns dabei vor, dass diese Ebene mit der Tafel der Zeichnung zusammenfalle. Die Trennungsfläche des oberen und unteren Mediums

wird alsdann senkrecht gegen die Tafel gerichtet sein. Nach der Annahme liegt nun noch ein zweiter Strahl $S_1 Q_1$ in derselben Ebene SPE oder SPE_1; ebenso die Normale LQ_1 des Flächenelementes Q_1. Die Richtung der durch den Punct P gehenden Welle ist nun PP_1; die Wellenebene selbst steht zur Ebene der Tafel senkrecht und schneidet die Trennungsfläche der Medien in einer Geraden (P), welche gleichfalls normal gegen die Ebene der Tafel gerichtet ist, sich aber in der Zeichnung als Punct projicirt.

Die Lichtbewegung geht nun nach dem Huyghensschen Princip in der Art weiter vor sich, dass bei der parallel mit sich fortschreitenden Welle der Reihe nach mit constanter Geschwindigkeit die Puncte der Normalen (P) bis (Q_1) Erregungsmittelpuncte neuer sphärischer Wellen werden. Diese breiten sich aus theils im Medium I mit der früheren Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_1, theils im Medium II mit einer anderen, etwa geringeren Geschwindigkeit v_2. In jedem beliebigen Zeitmomente der Bewegung bildet dann die Umhüllungsfläche aller jener Elementarwellen die resultirende Welle, welche von den Puncten der Normale (P) ausgeht. Dieselbe ist offenbar ein Cylindermantel, also eine cylindrische Elementarwelle. Ist die Wellenbewegung in der Zeiteinheit von P_1 nach Q_1 fortgeschritten, so hat sich von (P) aus im Medium I eine cylindrische Elementarwelle von demselben Radius $PQ_{II} = P_1 Q_1$ gebildet. Für die Normalen zwischen (P) und (Q_1) findet dies nach Verhältniss der Zeit Statt. (Fig. 3.) Es bilden sich innerhalb der Zeiteinheit von P nach Q_1 hin nach einander lauter cylindrische Elementarwellen, deren Umhüllungsfläche die zur Tafel senkrechte Ebene und resultirende ebene Wellenfläche $(Q_1 Q_{II})$ ist.

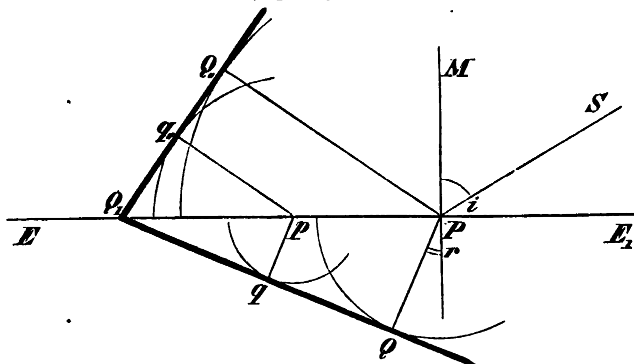


Fig. 3.

Da die Wellenbewegung im isotropen Mittel vor sich geht, so ist die Wellenebene senkrecht gegen die Strahlen geblieben; $PQ_{II}Q_1$ ist ein rechtwinkliges Dreieck und liegt in derselben Ebene wie PQ_1P_1. Da wir zugleich angenommen haben, dass die Strecke P_1Q in der Zeiteinheit durchlaufen wird, so ist P_1Q_1 gleich v_1 die Fortpflanzungs-

geschwindigkeit der Welle im Medium I. Da ausserdem $PQ_{II} = PQ_1$ ist, so wird $\sphericalangle P_1PQ_1 = \sphericalangle Q_{II}Q_1P$ d. i. $\sphericalangle SPM = \sphericalangle Q_{II}PM$.

Der erstere Winkel SPM, welchen der einfallende Strahl mit der Normalen bildet, heisst *Einfallswinkel* oder *Incidenzwinkel*; der andere, welchen der reflectirte Lichtstrahl PQ_{II} mit der Normalen bildet, heisst *Reflexionswinkel.* Es ergibt sich daraus als Fundamentalsatz für die Spiegelung des Lichtes: *Der Einfallswinkel und der Reflexionswinkel sind einander gleich.*

Sind also die einfallenden Strahlen einander parallel, so sind es auch die gespiegelten; ein kreisförmiger Cylinder von Strahlen wird auch als solcher reflectirt. Gehören die einfallenden Strahlen einem Strahlenkegel SPP_1 (Fig. 4) an, so bilden die reflectirten Strahlen die symmetrische Verlängerung desselben; der reflectirte Strahlenkegel hat seinen imaginären Divergenzpunct S_1 im Medium II und die blinde Verlängerung S_1PQ_1 desselben ist dem einfallenden Kegel SPQ_1 symmetrisch.

Ganz dieselbe Betrachtungsweise lässt sich nun auch für die durchgehenden Wellen anstellen. Während sich von der Normalen (P)

Fig. 4.

eine cylindrische Elementarwelle vom Radius PQ_{II} (Fig. 3) ausbreitet, gewinnt sie im Medium II nur den Radius PQ und die Wellenebene ist (QQ_1). Da die einzelnen Strahlen senkrecht gegen die Wellenebene bleiben, so ist das Dreieck PQQ_1 rechtwinklig und liegt mit den äusseren Dreiecken in derselben Ebene. Ferner ist $\sphericalangle QQ_1P = \sphericalangle M_1PB$. Der letztere Winkel, welchen der in das Medium II

eindringende, gebrochene Strahl PB mit der Normalen PM_1 bildet, heisst *Brechungswinkel*; denn es findet für den Fall, dass $\sphericalangle\, MPS$ von $\sphericalangle\, M_1PB$ verschieden ist, in der That eine Brechung des geraden Strahles SP in P Statt.

Um nun weiter einen analytischen Ausdruck für die Beziehungen der beiden Winkel, des Incidenzwinkels i und des Brechungswinkels r unter einander zu gewinnen, beachte man, dass

$$\frac{Q_1P_1}{Q_1P} = \frac{v_1}{Q_1P} = \sin i; \quad \frac{QP}{Q_1P} = \frac{v_2}{Q_1P} = \sin r.$$

Da v_1 und v_2 für ein und dasselbe Medium constante Grössen sind, nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts in der Zeiteinheit, so ist

$$\sin i : \sin r = v_1 : v_2 = n.$$

Hieraus ergibt sich das Gesetz der zweiten Modification des Ganges einfallender Lichtstrahlen, das Fundamentalgesetz der Brechung:

Die Sinus der Einfalls- und Brechungswinkel stehen zu einander in einem constanten Verhältniss. (Snell).

Dieses constante Verhältniss wird conventionell mit n bezeichnet; es ist der *Brechungsexponent* oder *Brechungsindex.*

Sind die einfallenden Strahlen einander parallel, so sind es auch die gebrochenen. Ein kreisförmiger Strahlencylinder wird nach der Brechung ein elliptischer. Gehören die Strahlen einem Lichtkegel an, so divergiren sie aus den imaginären Divergenzpunkten $T, T_1, T_2, \ldots$ im Medium I. (Fig. 4).

Ist der Brechungsindex n grösser als die Einheit, mit andern Worten: ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtbewegung im zweiten Mittel kleiner, als im ersten, so wird jenes das *optisch dichtere,* dieses das *optisch dünnere* genannt. Für destillirtes Wasser von 20^0 C. ist beispielsweise nach van der Willigen der Index n der Lichtfarbe D, also $n_D = 1{,}33350$. Demzufolge verhalten sich also die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts in destillirtem Wasser und in Luft nahezu wie 4 zu 3.

Uebertragung des Brechungsgesetzes auf die Spiegelung. § 3.
Wenn in der Gleichung $\sin i : \sin r = n$ der Werth $n > 1$ ist, so muss $\sin i > \sin r$ sein. Im Maximum seines Werthes beträgt der Winkel i 90^0 und da dies Max. mit demjenigen von r zusammenfällt, so ist $\max. \sin r = 1 : n$. Hieraus wird der Grenzwinkel von r gefunden; es ist $\max r = \arcsin\,(1 : n)$. Dies ist der grösste Werth, welchen der Brechungswinkel überhaupt erreichen kann, oder bei welchem der aus dem zweiten Medium gegen die Grenzfläche treffende Strahl noch in das erste Medium eintreten kann. Bei Ueberschreitung jenes Maximalwerthes von r findet *totale Reflexion* des Strahles innerhalb des zweiten, des optisch dichteren Mediums Statt. Für Wasser ist $\arcsin\,(1 : n_D) = 48^0\,40'$.

Die totale Reflexion findet jedesmal da Statt, wo die Lichtstrahlen in einem optisch dichteren Medium gegen die Trennungsfläche von einem dünneren treffen; und zwar in allen Fällen, wo der Einfallswinkel QPM_1 (Fig. 2) grösser ist als *arc sin* $(1:n)$. In allen übrigen Fällen findet partielle Reflexion und Refraction Statt, wobei natürlich die Intensität des Lichtes beider Strahlen gegen den ursprünglichen geschwächt erscheint. Sind J_1 und J_2 die Intensitäten, A_1 und A_2 die Schwingungsamplituden der getheilten Lichtbewegungen, J und A die der ursprünglichen, so ist nach dem Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft für den Fall, dass keine Absorption stattfindet, also Aetherbewegung in Molecularbewegung übergeführt wird

$$J_1 + J_2 = J, \quad A_1^2 + A_2^2 = A^2.$$

In der Regel aber wird ein Theil der Lichtbewegung latent, oder absorbirt; die Lichtbewegung setzt sich dann entweder in innere Dispersion (Fluorescenz), in Wärme- oder auch in electrische Bewegung um.

Aus der totalen Reflexion erklären sich manche Erscheinungen. Bringt man in der oberen Wandung eines mit Wasser gefüllten, überall geschlossenen Blechgefässes $ABCD$ (Fig. 5) in O eine kleine Oeffnung an, so dringt aus dem äusseren erleuchteten Raume ein Lichtkegel OPQ in das Innere ein, dessen Scheitelwinkel POQ gleich 2 arc sin $(1:n)$ ist.

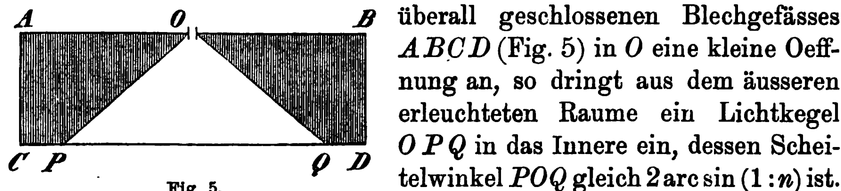


Fig. 5.

Zu einem Auge, welches sich in O (Fig. 6) unter einer an der Oberfläche freien Wasserschicht $ABCD$ befindet, können von oben herein Lichtstrahlen gelangen nur innerhalb des Kegels OPQ, wobei wie vorhin POQ gleich 2 arc sin $(1:n)$.

Dagegen sind entfernter gelegene Puncte der Wasserfläche, z. B.

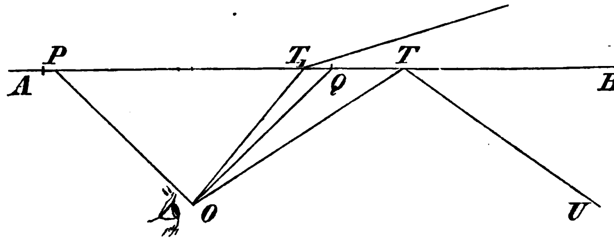


Fig. 6.

T vollkommen undurchsichtig und für die von U herkommenden Strahlen undurchdringlich — es tritt ja totale Reflexion ein.

Eine wichtige Anwendung dieses Gesetzes wird bei dem Refractometer von Abbe gemacht, welches zur Messung der Brechungsindices von Flüssigkeiten z. B. der Augenmedien angewandt und in einem spätern Capitel beschrieben werden wird.

Aus den beiden Fundamentalsätzen, welche oben für die Spie-

gelung und Brechung aufgestellt sind, ergibt sich noch eine andere analytische Beziehung zwischen beiden Erscheinungen, die für unsere späteren Betrachtungen ebenfalls von Nutzen ist. Es lassen sich nämlich in allen Fällen die für die Spiegelung gültigen Formeln aus denen der Brechung deduciren, dadurch, dass man $n = -1$ setzt. In diesem Falle wird $\sin i : \sin r = -1$, also $r = -i$.

Die Brechung der Lichtstrahlen an einer einzigen sphärischen Fläche. Gauss geht in seinen „Dioptrischen Untersuchungen" aus von der Gleichung eines Lichtstrahles (Lichtlinie), welcher in einer beliebigen, übrigens den in § 1. ausgesprochenen Beschränkungen unterworfenen Richtung in ein centrirtes System von einzelnen brechenden Kugelflächen eintritt, unter Zugrundelegung von rechtwinkligen Raumcoordinaten. Der Lichtstrahl, welcher nach der Annahme sehr wenig von der Richtung der Axe der Kugelflächen abweicht, kann übrigens entweder in einem Axenschnitte liegen, also die Axe schneiden, oder auch die Axe kreuzen. Die mathematischen Ausdrücke für den weiteren Verlauf des einzelnen Strahles gewinnen aber offenbar an Einfachheit, wenn man den Gang eines Lichtstrahles betrachtet, welcher in einem Axenschnitte liegt, so dass man es nur mit der Betrachtung von geometrischen Gebilden zu thun hat, welche in einer und derselben Ebene liegen. § 4.

Es lässt sich nun in der That jeder die Axe kreuzende Lichtstrahl durch einen andern ersetzen, welcher die Axe schneidet. Wir können uns jeden Lichtstrahl vorstellen als die Grenze eines unendlich dünnen Lichtkegels PD (Fig. 7), welcher von einem nahen oder entfernteren leuchtenden Puncte P ausströmt und im Allgemeinen die Axe XX_1 des Systems von brechenden Flächen kreuzt, so dass,

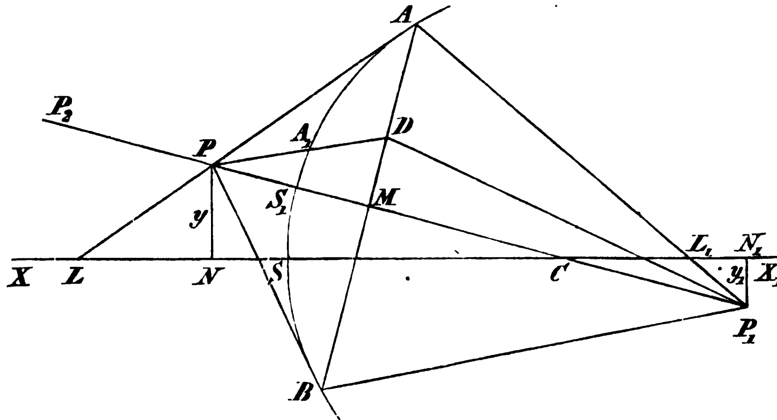


Fig. 7.

wenn P in der Ebene der Tafel liegt, der Strahl entweder vor oder hinter dieselbe tritt. Es sei S der Scheitel, C der Krümmungsmittel-

punct der vordersten Fläche, welche in D von dem Lichtstrahle getroffen wird. Ziehen wir durch den leuchtenden Punct P die Centrale PC und beschreiben mit dem Lichtstrahle PD auf der Kugelfläche (C) einen Kreis DAB, dessen Ebene gegen die Tafel senkrecht gerichtet ist, der sich aber in der Zeichnung als eine Gerade projicirt, so werden offenbar alle Lichtstrahlen, welche von P auslaufend, diesen Kugelkreis treffen, nach der Brechung sich in einem und demselben Puncte der Centrale PC etwa in P_1 durchkreuzen (reeller Convergenz- oder Brennpunct), oder auch aus einem rückwärts in derselben gelegenen Puncte P_2 divergiren (imaginärer oder virtueller Brennpunct).

Man wird demnach zur Betrachtung des Durchganges des Lichtes durch eine brechende Fläche und zur Bestimmung seines Durchschnittspunctes P_1 mit der Centralen des leuchtenden Punctes statt eines bestimmten Strahles PD von der Amplitude MPA aus dem vollständigen von P ausströmenden Lichtkegelmantel PAB irgend einen andern PA oder PB substituiren dürfen, welcher erhalten wird, indem man durch den Punct P und die Axe XX_1 eine Ebene legt. Die Lichtstrahlen oder unendlich dünnen Lichtkegel PA und PB kreuzen sich nach der Brechung in demselben Puncte P_1 der Centralen PC und schneiden die Axe XX_1 in zwei verschiedenen Puncten.

Es bleibt nun aber noch die Frage offen, ob der Kreuzungspunct P_1 (oder P_2) auch zugleich der Convergenzpunct (oder Divergenzpunct) aller von P gegen die brechende Fläche treffenden Strahlen ist, z. B. von PA_1. Die folgende Analysis wird uns beweisen, dass dies wirklich der Fall ist.

Es möge der Axenschnitt PXX_1 die brechende Fläche in dem als verhältnissmässig klein gegen den Radius S_1C angenommenen Bogen AS_1SB schneiden. Ferner sei der Scheitelpunct C Coordinatenanfangspunct, x und y die Coordinaten des leuchtenden Punctes P, x_1 und y_1 die des Brennpunctes P_1 zweier Strahlen PA und PB. Bezeichnen wir weiter mit r den Krümmungsradius S_1C der Kugelfläche, mit n den Brechungsindex des hinter der Fläche liegenden Mediums, so ist wegen $v_1 = v_2 n$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts im zweiten Medium $n$mal kleiner, als im ersten. Wir würden nun nachzuweisen haben, dass für alle von P ausgehenden Strahlen S_1P_1 eine constante Grösse sei.

Wir verfolgen zunächst den Gang eines Lichtstrahles, welcher von einem in der Axe gelegenen leuchtenden Puncte L (Fig. 8) sich über D fortpflanzt und die Axe wieder in L_1 schneidet. Diese Annahme stimmt mit der vorhergehenden überein, wenn wir uns in Fig. 7 nicht XX_1, sondern PC als Hauptaxe denken, wodurch im Gange der Lichtstrahlen nichts geändert wird. Der Punct L in Fig. 8 tritt an die Stelle von P in Fig. 7; ebenso L_1 an die Stelle von P_1.

Es werden nun nach dem Vorhergehenden alle Strahlen des mit LD um die Axe auf der Kugelfläche beschriebenen Kegelmantels sich

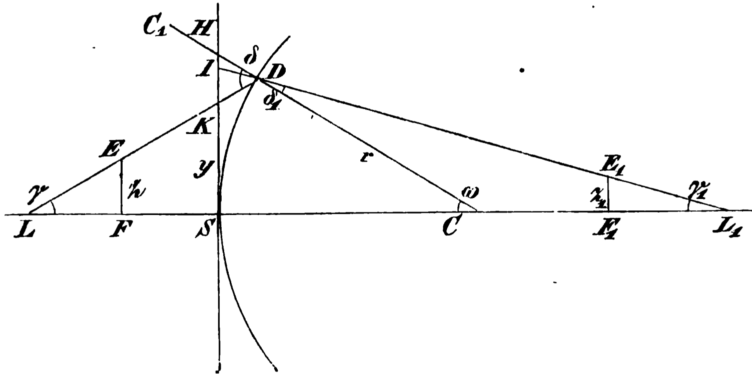


Fig. 8.

in L_1 schneiden. Vergegenwärtigen wir uns die für die Lösung unserer Aufgabe gesetzten Beschränkungen, so ist SD sehr klein gegen LS (oder x), gegen SL_1 (oder x_1) und gegen den Krümmungsradius r. Hieraus ergibt sich nun, dass die Amplitude ω des Punctes D, und ebenso die Winkel DLS (oder γ), DL_1S (oder γ_1) und CDL_1 (oder δ_1) so klein sind, dass man an die Stelle der Sinus und Tangenten dieser Winkel ihre Bögen oder die Winkel selbst, so wie für die Cosinus die Einheit setzen darf. Um so mehr wird dies von allen Puncten zwischen S und D gelten, welche von den Strahlen des ganzen Lichtkegels SLD getroffen werden.

Es kommt nun darauf an, eine Relation zwischen x und x_1 zu erhalten. Wir gelangen zu einer solchen auf folgende Art.

Das Einfallsloth in D ist der Radius CD oder dessen Verlängerung DC_1; mithin ist LDC_1 der Einfallswinkel, CDL_1 der Brechungswinkel des Strahles LD. Nun ist offenbar nach dem Snell'schen Brechungsgesetze mit Berücksichtigung der Kleinheit der Winkel

$$n = \sin\delta : \sin\delta_1 = \delta : \delta_1 = (\omega + \gamma) : (\omega - \gamma_1).$$

Ferner finden nach bekannten Sätzen der Trigonometrie folgende Proportionen Statt:

$$\text{im } \triangle\, LCD: \quad (x + r) : r = \sin(\omega+\gamma) : \sin\gamma = (\omega+\gamma) : \gamma,$$
$$\text{im } \triangle\, L_1CD: \quad (x_1 - r) : r = \sin(\omega-\gamma_1) : \sin\gamma_1 = (\omega-\gamma_1) : \gamma_1.$$

Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen nach γ und γ_1 erhält man

$$\gamma = \frac{r\omega}{x}, \quad \gamma_1 = \frac{r\omega}{x_1}.$$

Nun ist

$$SK = x \tan\gamma = x\gamma = r\omega,$$
$$SJ = x_1 \tan\gamma_1 = x_1\gamma_1 = r\omega.$$

Es ist demnach unter den angenommenen Einschränkungen des

allgemeinen Problems $SK = SJ$ zu setzen. J und K liegen einander sehr nahe und ebenso sind DH und DK verschwindend klein gegen SK (oder y). Es ist nämlich das Dreieck HKD spitzwinklig und $DH = \sqrt{r^2 + y^2} - r = \frac{1}{2} y \cdot \frac{y}{r}$; ferner $DK : DH = \cos\omega : \cos\gamma = 1 : 1$; folglich $DK = DH$. Man kann also, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, die drei Puncte H, K und D mit einander verschmelzen und aus diesem Grunde wird es auch gestattet sein, das mit dem kleinen Bogen SD beschriebene Kugelsegment als eine Ebene (Scheitelebene) zu betrachten.

Mit Hülfe der Gleichung $n = (\omega + \gamma) : (\omega - \gamma_1)$ erhält man nun weiter

$$n = \left(\omega + \frac{r\omega}{x}\right) : \left(\omega - \frac{r\omega}{x_1}\right) = \frac{x+r}{x} : \frac{x_1 - r}{x_1}$$

oder

$$\frac{r}{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{nr}{n-1} \cdot \frac{1}{x_1} = 1.$$

Hier muss nun bemerkt werden, dass bei der obigen Betrachtungsweise die Richtung der Linien gegen den Coordinatenanfangspunct S_1 ausser Acht gelassen ist und alle Linien als positiv oder absolut aufgefasst worden sind. Die Linien x, x_1 und r sind aber nur in ganz speciellen Fällen von gleicher Richtung. Wir wollen deshalb über das Vorzeichen ihrer Richtung Folgendes feststellen.

Die vom Coordinatenanfangspuncte S nach links, also gegen die Richtung des Ganges der Lichtstrahlen gerichteten Abschnitte sollen fortan als *negativ*, die nach rechts oder im Sinne des Ganges der Lichtstrahlen gerichteten Abschnitte als *positiv* betrachtet werden. Ferner soll der Krümmungsradius der brechenden Fläche als *positiv* betrachtet werden, wenn diese den von links hereinfallenden Lichtstrahlen ihre convexe Seite zuwendet. In dem in Fig. 8 vorgezeichneten Falle ist also x *negativ*, dagegen x_1 und r *positiv*. Wir schreiben demgemäss fortan die Abscissengleichung der Puncte L und L_1 in der Form

$$-\frac{r}{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{nr}{n-1} \cdot \frac{1}{x_1} = 1. \qquad (1)$$

Mittels dieser Gleichung ist man also im Stande, zu jedem Strahle LD, dessen Durchschnittspunct L mit der Axe gegeben ist, den Durchschnittspunct L_1 des zugehörigen in der Fläche gebrochenen Theiles mit der Axe zu berechnen. Da die Wurzel x_1 einwerthig und von der Grösse des Bogens SD ganz unabhängig ist, so lange dieser gegen den Radius r sehr klein ist, so geht hieraus hervor, dass alle von L ausgehenden Strahlen, also auch die Strahlenkegel, ihren Convergenzpunct in L_1 haben.

Da die Strahlen sämmtlich den Punct L_1 durchkreuzen, ohne sich in ihrer Bewegung zu stören, so verhält sich derselbe für den

jenseits desselben gelegenen Raum wie ein zweiter leuchtender Punct und man nennt ihn aus diesem Grunde den *Brennpunct* des Puncts L. Zu jedem leuchtenden Puncte (x) gehört also ein Brennpunct (x_1) und zwar nur *einer*. Da in isotropen Medien die Wellenbewegung des Lichts immer so vor sich geht, dass die Strahlen senkrecht zur Wellenfläche bleiben, so kommen alle Elementarwellen (Strahlen) gleichzeitig mit derselben Schwingungsphase in L_1 an und können deshalb nicht zur Interferenz gelangen. Wenn also von dem Lichtkegel PAB (Fig. 7) weder durch Spiegelung noch durch Absorption lebendige Kraft verloren ginge, so müsste die Helligkeit des Scheitels P_1 gleich der des Scheitels P gefunden werden.

In speciellen Fällen können nun x und x_1 als unendlich gross angenommen werden; es kann der Abstand x des Lichtpunctes L (Fig. 8) oder auch der Abstand x_1 des Brennpuncts von dem Scheitelpuncte der brechenden Fläche unendlich gross werden. Es sei in Formel (1)

$$-\frac{r}{n-1}=f,\quad \frac{nr}{n-1}=\varphi,$$

so reducirt sie sich auf die einfachere Gestalt

$$\frac{f}{x_0}+\frac{\varphi}{x_1}=1 \qquad (2)$$

welche in der Folge beibehalten werden soll. Für $x_0 = -\infty$ wird nun $x_1 = \varphi$ und für $x_1 = +\infty$, $x_0 = f$, wobei zu beachten ist, dass f wesentlich negativ ist, so lange r positiv ist. Wir nehmen nun an, SF sei gleich f, SF_1 gleich φ; dann wird F der Divergenzpunct parallel mit der Axe aus der brechenden Fläche austretender Strahlen, F_1 der Convergenzpunct aller parallel mit der Axe in die Fläche eintretenden Strahlen sein. Man nennt die beiden Puncte die *Hauptbrennpuncte* der brechenden Fläche; F ist *erster*, F_1 *zweiter* Hauptbrennpunct. Die Abstände f und φ derselben von der brechenden Fläche heissen die *Hauptbrennweiten* (Focaldistanzen) und bilden die Constanten der Abscissengleichung (2).

In Betreff der gegenseitigen Lage der Puncte F und F_1 ist zu bemerken, dass für einen positiven Werth von r und $n > 1$ der erste Hauptbrennpunct immer *vor* dem zweiten liegt; ist aber entweder r negativ, d. h. die brechende Fläche nach vorn concav, oder auch $n < 1$, so wird das Umgekehrte der Fall sein.

Wir haben bisher angenommen, dass die Abstände der zueinander gehörigen Puncte L und L_1 vom Scheitelpunct S an gerechnet werden. Es hindert uns nichts, dieselbe von einem andern Puncte, z. B. vom Krümmungsmittelpuncte C, oder sogar von zwei verschiedenen Puncten an zu rechnen. Das letzte Verfahren dient zu einer grossen Vereinfachung der dioptrischen Formeln bei der Betrachtung des Durchganges eines Lichtstrahles durch ein System von brechenden Flächen.

Wir wollen die Abscissen zunächst von C an rechnen. Die neuen Abscissen seien k_0 und k_1, die neuen Focaldistanzen f_1 und φ_1, so ist mit Beibehaltung des Vorzeichens der Richtungen

$$CF = f_1 = f - r, \quad CF_1 = \varphi_1 = \varphi - r,$$

wobei also f_1 als wesentlich negativ, φ_1 als positiv zu betrachten ist.

Hieraus ergeben sich nun die Relationen

$$f_1 = f - r = -\frac{r}{n-1} - r = -\frac{nr}{n-1} = -\varphi$$

$$\varphi_1 = \varphi - r = \frac{nr}{n-1} - r = \frac{r}{n-1} = -f.$$

$$nf = -\varphi = f_1 = -n\varphi_1.$$

Für die alten und neuen Abscissen gelten die Beziehungen

$$x_0 = k_0 + r, \quad x_1 = k_1 + r.$$

Setzt man die Werthe sämmtlich in (2) ein, so erhält man

$$\frac{r-\varphi}{r+k_0} + \frac{r-f}{r+k_1} = 1.$$

Multiplicirt man die Gleichung mit $(r+k_0)$ $(r-k_1)$, so ergibt sich daraus

$$\left.\begin{array}{l} r^2 - \varphi r + k_1 r - k_1 \varphi \\ + r^2 - fr + k_0 r - k_0 f \end{array}\right\} = r^2 + k_0 r + k_1 r + k_0 k_1.$$

Da nun $\varphi + f = r$ ist, so reducirt sich alles auf

$$-k_1\varphi - k_0 f = k_0 k_1$$

oder

$$\frac{(-\varphi)}{k_0} + \frac{(-f)}{k_1} = 1. \qquad (3)$$

Diese Gleichung hat eine der früheren ähnliche Form. In Gleichung (2) ist S Coordinatenanfangspunct. Ist der leuchtende Punct in S befindlich, so ist $x_0 = 0$; folglich auch $x_1 = 0$. In dem Scheitelpuncte fällt also der Brennpunct mit dem Lichtpunct zusammen. Befindet sich der Convergenzpunct der von vorne in die brechende Fläche eintretenden Lichtstrahlen in C, ist also der leuchtende Punct imaginär, so ist in Formel (3) $k_0 = 0$ zu setzen; woraus sich zugleich $k_1 = 0$ ergibt. Darnach sind S und C zwei Puncte, dadurch characterisirt, dass in ihnen Licht- und Brennpunct mit einander zusammenfallen.

Man kann die Verhältnisse also in dem allgemeinen Falle (2) auch so ansehen, dass der Abstand x_0 des einen leuchtenden Punctes L von einem andern in S befindlichen leuchtenden Punct abgerechnet wird, und der Abstand x_1 des Brennpuncts L_1 von dem auch in S befindlichen zu S gehörigen Brennpuncte. Das Gleiche gilt von der Formel (3). Diese Betrachtungsweise lässt sich mit grossem Nutzen verallgemeinern. Man erhält nämlich immer Gleichungen von der-

selben einfachen Form, wie in (2) und (3), wenn man den Abstand des leuchtenden Punctes L von irgend einem Puncte T der Axe und den Abstand des Brennpunctes L_1 von dem zu T gehörigen Brennpuncte T_1 abrechnet.

Es sei nämlich P (Fig. 9) der leuchtende Punct, P_1 sein Brennpunct; ebenso T und T_1 zwei andere zusammengehörige Puncte,

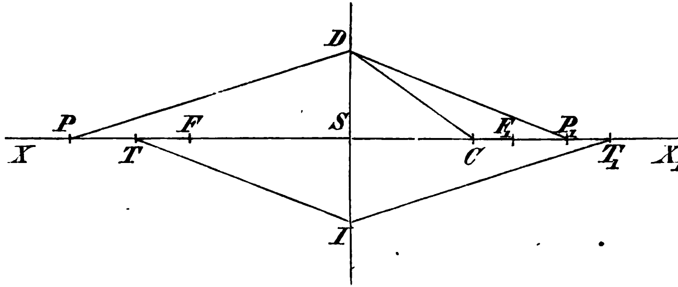


Fig. 9.

F und F_1 die beiden Hauptbrennpuncte. Ferner

$$SP = x_0 \quad ST = x_2 \quad SF = f \quad TP = t_0 \quad TF = f_1$$
$$SP_1 = x_1 \quad ST_1 = x_3 \quad SF_1 = \varphi \quad T_1P_1 = t_1 \quad T_1F_1 = \varphi_1,$$

wobei wir annehmen, dass die Richtung nach rechts positiv gerechnet wird, die Constanten f und φ_1 negative, φ und f_1 positive Werthe haben. Es ist alsdann nach dem Frühern

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1 \text{ und } \frac{f}{x_2} + \frac{\varphi}{x_3} = 1.$$

Weiter ist

$$x_0 - x_2 = t_0 \qquad x_2 - f = - f_1$$
$$x_1 - x_3 = t_1 \qquad x_3 - \varphi = - \varphi_1.$$

Substituiren wir diese Werthe von x_0 und x_1 in die erste Gleichung, so ergibt sich

$$\frac{f}{x_2 + t_0} + \frac{\varphi}{x_3 + t_1} = 1$$

oder

$$fx_3 + ft_1 + \varphi x_2 + \varphi t_0 = x_2 x_3 + x_2 t_1 + x_3 t_0 + t_0 t_1.$$

Ferner ist wegen der zweiten Gleichung

$$fx_3 + \varphi x_2 = x_2 x_3,$$

folglich

$$ft_1 + \varphi t_0 = x_2 t_1 + x_3 t_0 + t_0 t_1$$

oder

$$(f - x_2)\, t_1 + (\varphi - x_3)\, t_0 = t_0 t_1$$
$$+ f_1 t_1 + \varphi_1 t_0 = t_0 t_1$$
$$\frac{f_1}{t_0} + \frac{\varphi_1}{t_1} = 1 \qquad (4)$$

Geht nun in einem speciellen Falle der Punct T in S über, so wird

$f_1 = -f$, $\varphi_1 = -\varphi$ und $-x_0$ wie $-x_1$ treten an die Stelle von t_0 und t_1; wir erhalten so wieder die Gleichung (2).

Geht T in C über, so wird $f_1 = -f + r = \varphi$, und $\varphi_1 = -\varphi + r = f$; an die Stelle von t_0 und t_1 treten $-k_0$ und $-k_1$; wir erhalten die Gleichung (3).

Wenn nun aber T in F übergeht, so entfernt sich T_1 bis ins Unendliche; f_1 wird gleich 0 und φ_1 gleich ∞. Nehmen wir an, dass dabei ξ_0 und ξ_1 an die Stelle von t_0 und t_1 treten, so würden wir die neue Gleichung

$$\frac{0}{\xi_0} + \frac{(-\infty)}{\xi_1} = 1$$

erhalten, welche zu einer Berechnung von ξ_1 untauglich ist. Setzt man dagegen in der Gleichung (2)

$$x_0 = f + \xi_0, \quad x_1 = \varphi + \xi_1,$$

so geht sie über in

$$\frac{f}{f + \xi_0} + \frac{\varphi}{\varphi + \xi_1} = 1$$

oder kürzer

$$\xi_0 \, \xi_1 = f \varphi, \tag{5}$$

wo ξ_0 und ξ_1 die Brennpunctscoordinaten sind. Sind demnach P und P_1 zusammengehörige Puncte, so ist $FP = \xi_0$, $F_1 P_1 = \xi_1$. Da f einen negativen und φ einen positiven Werth hat, so ist eine der beiden Abscissen ξ_0 und ξ_1 stets positiv, die andere negativ. Es lässt sich daher aus dieser Formel deutlicher als aus den früheren die gegenseitige Lage der zusammengehörigen Puncte erkennen.

Ist $\xi_0 = -\infty$, so ist $\xi_1 = 0$, d. h. P_1 liegt im zweiten Hauptbrennpuncte. Liegt P zwischen F und X, so ist ξ_0 negativ und P_1 liegt zwischen F_1 und X_1. Liegt P in F, so ist $\xi_0 = 0$ und $\xi_1 = \pm \infty$. Wenn P zwischen F und S liegt, so ist ξ_0 positiv und P_1 liegt zwischen S und X. Liegt P in S, so ist $\xi_0 = -f$ und $\xi_1 = -\varphi$; es liegt also auch P_1 in S. Wenn P zwischen S und X_1 liegt (virtueller Lichtpunct), so ist $\xi_0 = -f + l$, und $\xi_1 = -f\varphi : (f - l)$, also $0 > \xi_1 > -\varphi$, d. h. P_1 liegt zwischen S und F_1. Ist endlich $\xi_0 = +\infty$, so ist $\xi_1 = 0$ und P_1 liegt wieder im zweiten Hauptbrennpuncte.

Kürzer und übersichtlicher lassen sich diese Verhältnisse folgendermassen ausdrücken: Bewegt sich der Scheitel P eines Lichtkegels auf der Axe XX_1 aus unendlich negativer Entfernung durch den Scheitelpunct einer brechenden Fläche hindurch bis in eine unendlich positive Entfernung, so bewegt sich der Brennpunct P_1 vom zweiten Hauptbrennpunct F_1 aus in eine unendlich positive Entfernung und in die unendlich negative überspringend wiederum bis zum Ausgangspuncte F_1. Liegt dabei der Punct P_1 vor der brechenden Fläche, so ist der Brennpunct virtuell, liegt er im zweiten Medium, reell.

Ausser den Abscissengleichungen (2), (3), (4) und (5) gibt es noch zwei andere, welche Beachtung verdienen. Sie sind wie die Gleichungen (2) und (3) specielle Fälle von (4).

Denken wir uns die Puncte T und T_1 (Fig. 9) so gelegen, dass sie gleiche Abstände vom Scheitelpuncte S haben, alsdann verlaufen offenbar die Strahlenelemente TJ und JT_1 symmetrisch zu beiden Seiten der Scheitelebene. Wir werden sie deshalb im Folgenden die *Puncte des symmetrischen Durchganges* nennen. Man erhält die Abstände derselben vom Scheitelpunct, wenn man in (2) $x_1 = -x_0$ setzt; also

$$\frac{f}{ST} + \frac{\varphi}{-ST} = 1.$$

Hieraus folgt $ST = f - \varphi$, $ST_1 = -(f - \varphi)$. Bezeichnen wir die Abscisse TP mit l_0, T_1P_1 mit l_1, so ist

$$x_0 = f - \varphi + l_0, \quad x_1 = -(f - \varphi) + l_1,$$

und

$$\frac{f}{f - \varphi + l_0} + \frac{\varphi}{-f + \varphi + l_1} = 1,$$

oder einfacher

$$\frac{\varphi}{l_0} + \frac{f}{l_1} = 1. \qquad (3b)$$

Denken wir uns ferner die Puncte T und T_1 so gelegen, dass T den doppelten Abstand der Brennweite f von S hat, so hat auch T_1 den doppelten Abstand der Brennweite φ von S. Es folgt nämlich aus

$$\frac{f}{2f} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

sofort $x_1 = 2\varphi$. Bezeichnen wir die neue Abscisse TP mit g_0, T_1P_1 mit g_1, so ist

$$x_0 = 2f + g_0, \quad x_1 = 2\varphi + g_1$$

und

$$\frac{f}{2f + g_0} + \frac{\varphi}{2\varphi + g_1} = 1$$

oder einfacher

$$\frac{(-f)}{g_0} + \frac{(-\varphi)}{g_1} = 1. \qquad (2b)$$

Stellen wir sämmtliche Abscissengleichungen zusammen, so sind es folgende:

$\frac{f_1}{t_0} + \frac{\varphi_1}{t_1} = 1$	(4)	(allgemeine Gleichung)
$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$	(2)	(Scheitelpunctsgleichung)
$\frac{(-f)}{g_0} + \frac{-\varphi}{g_1} = 1$	(2b)	
$\frac{(-\varphi)}{k_0} + \frac{(-f)}{k_1} = 1$	(3)	(Mittelpunctsgleichung oder Gleichung des gleichen Durchgangs)
$\frac{\varphi}{l_0} + \frac{f}{l_1} = 1$	(3b)	(Gleichung des symmetrischen Durchgangs)
$\frac{f}{\xi_0} \cdot \frac{\varphi}{\xi_1} = 1$	(5)	(Brennpunctsgleichung)

§ 5. **Uebertragung des Brechungsgesetzes auf die Spiegelung der Lichtstrahlen einer einzigen sphärischen Fläche.** Es lassen sich die Formeln der Katoptrik unmittelbar aus denen der Dioptrik ableiten, indem man $n = -1$ setzt.

Betrachten wir den Convexspiegel, so ist r positiv und die Formel (1) $$-\frac{r}{n-1}\cdot\frac{1}{x_0}+\frac{nr}{n-1}\cdot\frac{1}{x_1}=1$$ geht über in die einfachere
$$\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}=\frac{2}{r}.$$
Die zusammengehörigen Specialwerthe von x_0 und x_1 sind folgende:
$$x_0=-\infty,\quad x_1=+\frac{1}{2}r;$$
$$x_0=\quad 0,\quad x_1=\quad 0;$$
$$x_0=+\frac{1}{4}r,\quad x_1=-\frac{1}{2}r;$$
$$x_0=+\frac{1}{2}r,\quad x_1=\mp\infty;$$
$$x_0=+r,\quad x_1=+r;$$
$$x_0=+\infty,\quad x_1=+\frac{1}{2}r.$$
Die partiellen Brennpuncte sind demnach beim Convexspiegel reell für die virtuellen leuchtenden Puncte zwischen den Grenzen $x_0=0$ und $+\frac{1}{2}r$; d. h. sie liegen vor dem Spiegel.

Betrachten wir den Concavspiegel, so ist r negativ und die Gleichung der Abstände zusammengehöriger Puncte vom Scheitelpuncte des Spiegels (optischer Mittelpunct)
$$\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}=-\frac{2}{r}.$$
Die zusammengehörigen Specialwerthe von x_0 und x_1 sind folgende:
$$x_0=-\infty,\quad x_1=-\frac{1}{2}r;$$
$$x_0=-r,\quad x_1=-r;$$
$$x_0=-\frac{1}{2}r,\quad x_1=\mp\infty;$$
$$x_0=-\frac{1}{4}r,\quad x_1=+\frac{1}{2}r;$$
$$x_0=\quad 0,\quad x_1=\quad 0;$$
$$x_0=+\infty,\quad x_1=-\frac{1}{2}r.$$

Die partiellen Brennpuncte sind folglich bei dem Concavspiegel reell für die reellen leuchtenden Puncte zwischen den Grenzen $x_0=-\infty$ und $-\frac{1}{2}r$ und für die virtuellen leuchtenden Puncte zwischen $x_0=0$ und $+\infty$.

Nimmt man C als Coordinatenanfangspunct, so liefert für den ersten Fall die Formel (3) die Gleichung

$$\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} = -\frac{2}{r},$$

für den zweiten Fall dagegen

$$\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} = +\frac{2}{r}.$$

Wählt man die Hauptbrennpuncte, welche wegen $\varphi = -f$ in *einen* zusammenfallen, als Anfangspuncte der Abscissen, so ist in beiden Fällen

$$\xi_0 \, \xi_1 = \frac{1}{4} r^2.$$

Demnach sind die Werthe von ξ_0 und ξ_1 zugleich positiv oder negativ. Ist S leuchtender Punct, so ist $\xi_1 = \xi_0 = \pm \frac{1}{2} r$; dieselben Werthe gelten, wenn C leuchtender Punct ist. S und C sind ihre eigenen Spiegelbrennpuncte, ganz so wie bei der Brechung. Aus den oben berechneten Werthen ergibt sich noch, dass die Brennweite des Convexspiegels positiv, die des Concavspiegels negativ ist.

Wir betrachten noch den speciellen Fall, wo die Trennungsfläche der beiden Medien keine Kugelfläche, sondern eine *Ebene* ist. Diese Betrachtung ergibt auch sowol einen Brennpunct der Brechung als der Spiegelung. Dieselben sind übrigens in allen den Fällen, in welchen x_0 positiv ist, imaginär. Es liegt nämlich der Brennpunct der Brechung *vor*, und der der Spiegelung *hinter* der Trennungsfläche, wie sich aus der Discussion der Gleichungen ergibt.

a. *Der Fall der Brechung.* n ist beliebig, $r = \pm \infty$. Die Formel (2) lautet für diesen Fall

$$\frac{1}{x_0} - \frac{n}{x_1} = 0, \qquad x_1 = n x_0.$$

Für jedes positive x_0 ist also auch x_1 positiv und umgekehrt: ist für jedes negative x_0 das zugehörige x_1 negativ.

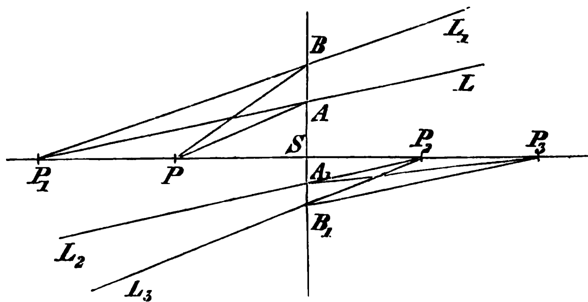


Fig. 10 a.

Ist das erste Medium Luft, das zweite Wasser, so liegt der virtuelle Brennpunct in der $n$fachen Entfernung vom Niveau. Ist dagegen das erste Medium Wasser, das zweite Luft, so ist $\frac{1}{n}$ an die Stelle von n zu setzen und in diesem Falle $x_1 = \frac{1}{n} x_0$. Für ein positives x_0 ist der Brennpunct virtuell, für ein negatives x_0 dagegen reell. (Fig. 10a.)

b. *Der Fall der Spiegelung.* Hierbei ist $n = -1$ und $r = \infty$, also

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} = 0.$$

Für jedes positive x_0 ist x_1 ebenso gross und negativ. Licht- und Brennpunct liegen in gleichen Abständen von der spiegelnden Fläche. Ist x_0 negativ, d. h. liegt der leuchtende Punct P im vorderen Medium, so ist x_1 positiv; der Brennpunct P_1 liegt im hinteren Medium und ist virtuell. Ist x_0 positiv, liegt der Convergenzpunct der Lichtstrahlen im hinteren Medium (virtueller Lichtpunct), so ist x_1 negativ. Der Brennpunct liegt im vorderen Medium, und ist demnach reell. (Fig. 10b.)

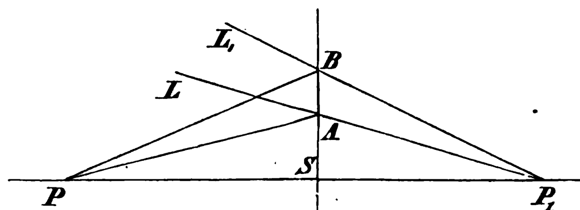


Fig. 10 b.

§ 6. **Der Satz von den Ordinaten beliebiger Strahlen in den Hauptbrennpuncten. — Construction der gebrochenen Strahlen.**

Theorem von Neumann: Sind z und z_1 die Ordinaten irgend eines Lichtstrahles in den Hauptbrennpuncten einer einzelnen brechenden Fläche, y die Ordinaten im Scheitelpuncte derselben, so ist stets

$$y = z + z_1.$$

Beweis: Da aus der Refractionsformel (2) folgt, dass x_1 von y oder von dem zwischen der Axe und dem Einfallspuncte des Strahles gelegenen Bogen unabhängig ist, so convergirt der ganze von L (Fig. 8) ausgehende den Bogen SD treffende Lichtkegel in L_1. Die Ordinaten eines solchen Strahles LDL_1 in den Hauptbrennpuncten F und F_1 seien gleich z und z_1. Dann folgt aus ähnlichen Dreiecken:

$$(x_0 - f) : x_0 = z : y \text{ oder } \frac{f}{x_0} = 1 - \frac{z}{y},$$

$$(x_1 - \varphi) : x_1 = z_1 : y \text{ oder } \frac{\varphi}{x_1} = 1 - \frac{z_1}{y}.$$

Hieraus ergibt sich durch Addition

$$2 - \frac{z + z_1}{y} = \frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1,$$

also

$$y = z + z_1. \qquad (6)$$

Liegt L zwischen F und S, so ist x_1 negativ und L_1 liegt vor der brechenden Fläche. Wenn in diesem Falle z positiv ist, so sind y und z_1 beide negativ. Die Richtung eines solchen Strahles ist dann dem Durchgange des Strahles PJP_1 (Fig. 11) entsprechend. Die Gleichung (6) findet aber immer Statt, so dass irgend ein beliebiger

Strahl PJU auch so verlaufen kann, dass J in S liegt, also y gleich Null wird. In diesem Falle ist $z_1 = -z$.

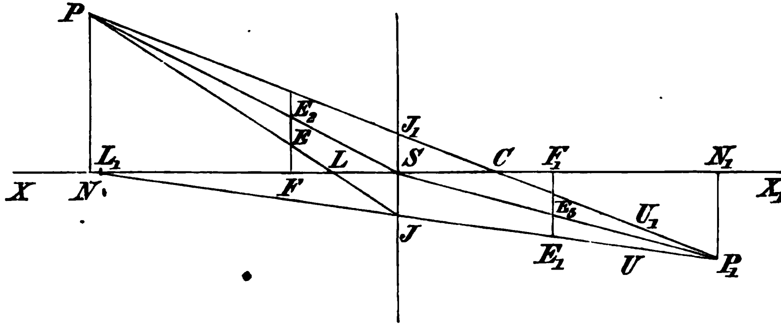


Fig. 11.

Wir gehen in dieser Betrachtung einen Schritt weiter. Der Durchschnittspunct oder Divergenzpunct der beiden vorhin betrachteten Strahlen sei P; dadurch, dass wir uns P als einen neuen leuchtenden Punct vorstellen, wird in dem Verlauf der gebrochenen Strahlen nichts geändert. P_1 ist offenbar Brennpunct von P, ausserdem liegen P und P_1 mit dem Krümmungsmittelpuncte C in ein und derselben Geraden, da wir uns auch PC als die optische Axe vorstellen können. Fällen wir von P und P_1 auf die Axe XX_1 die Perpendikel PN und P_1N_1, so sind dies die Ordinaten Y_0 und Y_1 zweier zusammengehöriger Puncte, SN und SN_1 ihre Abscissen, die wir mit x_0 und x_1 bezeichnen wollen. Aus Fig. 11 folgt dann weiter, indem wir $FE_2 = \zeta$, $F_1E_3 = \zeta_1$ setzen:

$$(x_0 - f) : x_0 = (\zeta - z) : (-y),$$
$$(x_1 - \varphi) : x_1 = (\zeta_1 - z_1) : (-y).$$

Addirt man die beiden Gleichungen und beachtet, dass $\zeta + \zeta_1 = 0$ und $y = z + z_1$ ist, so erhält man wieder die Gleichung (2), nämlich

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1,$$

d. h. dieselbe Abscissengleichung für seitwärts von der Axe gelegene zusammengehörige Puncte. Wir kommen im nächsten Abschnitt auf dies wichtige Resultat zurück.

Durch die bis jetzt gewonnenen Sätze werden wir nun in den Stand gesetzt, zu einem in der Axe liegenden leuchtenden Puncte den zugehörigen Brennpunct und für jeden einfallenden Strahl den gebrochenen geometrisch zu construiren.

Sind die beiden Hauptbrennpuncte F und F_1 gegeben, so ist für irgend einen Strahl LJ (Fig. 11) sowol z als y und damit nach Formel (6) auch z_1 gegeben. Der gebrochene Strahl ist also JE_1 und ausserdem L_1 der zu dem Durchschnittspuncte L zugehörige Brennpunct. (Methode der Ordinaten der Brennpuncte).

Eine zweite Methode der Construction lässt sich auf Formel (2) gründen. Um den Brennpunct L_1 des leuchtenden Punctes L (Fig. 12) zu finden, nehme man SJ beliebig lang und JP parallel und gleich SL, ausserdem PL senkrecht zu SL. Ferner ziehe man PEJ_1 und J_1P_1 parallel SF_1 bis zum Durchschnittspuncte P_1 mit JF_1. Fällt

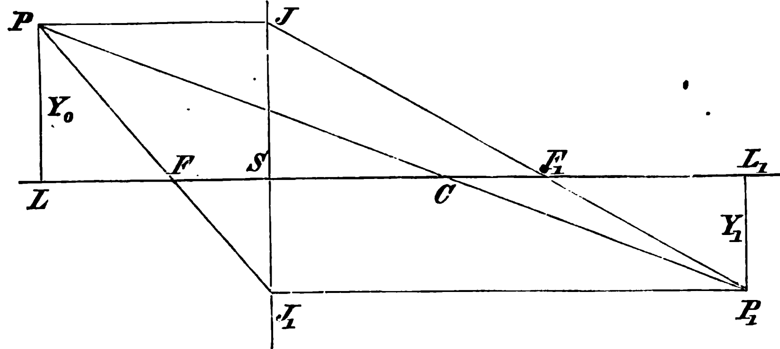


Fig. 12.

man noch P_1L_1 senkrecht auf die Axe, so ist L_1 der gesuchte Punct. (Methode des Trapezes.)

Der Beweis ergibt sich folgendermassen. Es ist $SL = x_0$, $SF = f$, $SL_1 = x_1$, $SF_1 = \varphi$. Bezeichnen wir ausserdem $LP = SJ$ mit Y_0, $SJ_1 = L_1P_1$ mit Y_1, so ist

$$(x_0 - f) : f = Y_0 : (-Y_1),$$
$$(x_1 - \varphi) : \varphi = (-Y_1) : Y_0.$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen miteinander, so wird

$$(x_0 - f)\,(x_1 - \varphi) = f\varphi$$

oder

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1.$$

Uebrigens gründet sich das vorstehende Verfahren auf das Verhalten der von einem leuchtenden Puncte P aus fahrenden Lichtstrahlen beim Durchgange durch die brechende Fläche, dass nämlich der parallel mit der Axe eintretende Strahl PJ nach der Brechung durch den zweiten Hauptbrennpunct F_1, der vom ersten Brennpuncte F in die Fläche eintretende Strahl FJ_1 nach der Brechung parallel mit der Axe geht und dass ein Centralstrahl PC gar keine Brechung erleidet. Was für den seitlich gelegenen Punct P gilt, muss auch für den Punct L gelten, dessen Abstand von der Axe als unendlich klein angesehen werden kann.

Eine dritte Construction erhält man durch Anwendung von Gleichung (5), wie Fig. 13 zeigt. Es sei L der leuchtende Punct, $FL = \xi_0$, $F_1L_1 = \xi_1$. Da F und F_1 Coordinatenanfangspuncte sind, so

ist mit Berücksichtigung der Richtung der Abscissen $FS = -f$, $F_1 S = -\varphi$. Man nehme JS beliebig, JE_1 parallel und gleich SF_1, ziehe JL und $E_1 F$ bis zum Durchschnittspuncte U, und US bis zum

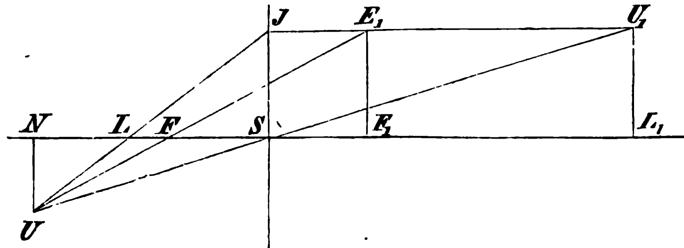


Fig. 13.

Durchschnittspuncte U_1. Fällt man nun $U_1 L_1$ senkrecht zur Axe, so ist L_1 der Brennpunct von L_1. Es ist nämlich

$$\xi_0 : f = \varphi : \xi_1 \text{ oder } \xi_0 \xi_1 = f\varphi,$$

wodurch der Formel (5) Genüge geschieht.

Conjugirte Puncte in und ausserhalb der Axe. — Die Gleichungen der Ordinaten conjugirter Puncte. In den vorangehenden Abschnitten wurden nur die Brennpuncte von denjenigen Strahlenbüscheln gesucht, deren Divergenzpuncte (Lichtpuncte) in der Axe gelegen sind. Nun kann man zwar bei einer einzigen Fläche die Axe durch den Lichtpunct gehen lassen; das ist aber nicht mehr zulässig bei einem System von centrirten Kugelflächen, wo die Axe fest ist. § 7.

Es ist bereits in § 4 gezeigt worden, dass die von irgend einem leuchtenden Puncte P auslaufenden Lichtstrahlen nach der Brechung sämmtlich entweder gegen einen und denselben Punct P_1 der Centrale dieses Punctes convergiren oder aus einem virtuellen Brennpuncte P_2 derselben Centralen divergiren. Je zwei solche zusammengehörige Puncte P und P_1 werden *conjugirte* Puncte genannt.

Dass dieser wichtige Satz von der Convergenz aller gebrochenen Lichtstrahlen in *einen* Punct der Centralen des leuchtenden Punctes ebenso für die seitwärts von der Hauptaxe liegenden leuchtenden Puncte gilt, lässt sich mittels des Satzes von den Ordinaten der Strahlen in den Brennpuncten beweisen.

Es seien (Fig. 14) PC die Centrale des Punctes P, PJ_1P_1 und PJ_2P_2 zwei beliebige Strahlen, welche sich in den Puncten P_1 und P_2 der Centrale schneiden. Es ist zu zeigen, dass P_2 mit P_1 zusammenfällt.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$SJ = y,\ SJ_1 = y_1,\ SJ_2 = y_2,\ SN = x_0,\ SN_1 = x_1,\ SN_2 = x_2;$$
$$FE = z,\ FE_1 = z_1,\ FE_2 = z_2,\ F_1E_3 = z_3,\ F_1E_4 = z_4,\ F_1E_5 = z_5.$$

Alsdann folgt aus ähnlichen Figuren:

$$(x_0 - f) : x_0 = (z - z_1) : (y - y_1),$$
$$(x_1 - \varphi) : x_1 = (z_3 - z_4) : (y - y_1).$$

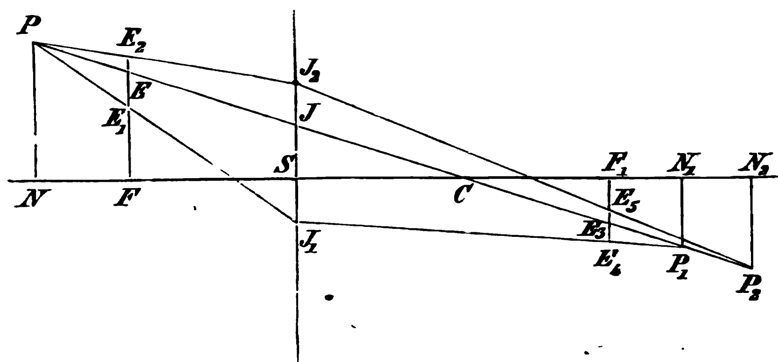


Fig. 14.

Addirt man diese beiden Gleichungen und beachtet, dass

$$z + z_3 = y, \quad z_1 + z_4 = y_1$$

ist, so ergibt sich, wie im vorigen Paragraphen,

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1.$$

Ferner ist

$$(x_0 - f) : x_0 = (z_2 - z) : (y_2 - y),$$
$$(x_2 - \varphi) : x_2 = (z_5 - z_3) : (y_2 - y).$$

Da nun $z_2 + z_5 = y_2$, $z + z_3 = y$ ist, so erhält man auch

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_2} = 1.$$

Die Coexistenz beider Gleichungen erfordert $x_2 = x_1$. Hieraus folgt dann, dass P_2 und P_1 zusammenfallen, und für zwei beliebige conjugirte Puncte die Gleichung (2) besteht.

Wir sind so zu dem wichtigen Resultate gelangt, dass die Refractionsformeln (2), (3), (4) und (5) auch für seitwärts von der Hauptaxe gelegene conjugirte Puncte Gültigkeit haben. Zugleich erkennen wir daraus, dass diese Beziehungen sowol bei den einfachen als den doppelten Coordinatensystemen von der Grösse der Ordinaten der conjugirten Puncte abhängig sind.

Der „Satz vom Trapez" PJP_1J_1 (Fig. 12) ist offenbar ein specieller Fall vom Trapezoid $PJ_2P_1J_1$ (Fig. 14) und es können beide Constructionen zur geometrischen Bestimmung des gebrochenen Strahles dienen.

Wir betrachten noch irgend zwei parallele in die brechende Fläche eintretende Strahlen LJ und L_1J_1 (Fig. 15). Dieselben mögen die im zweiten Hauptbrennpuncte F_1 zur Axe senkrechte Ebene

(Hauptbrennebene) in zwei verschiedenen Puncten P und P_1 schneiden. Die Ordinaten der Strahlen in den Brennpuncten F und F_1 und im Scheitelpuncte seien:

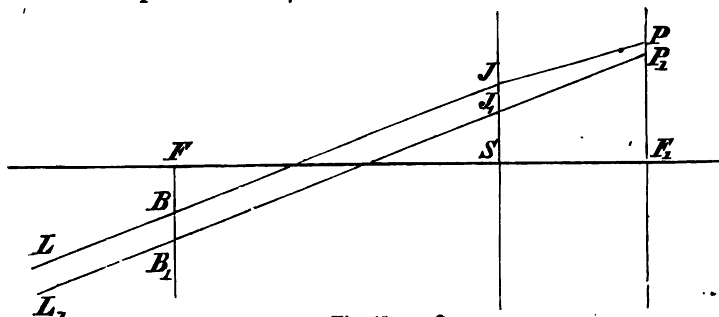


Fig. 15.

$$FB = z, \quad SJ = y, \quad F_1 P = z_1,$$
$$FB_1 = \zeta, \quad SJ_1 = y_1, \quad F_1 P_1 = z_2.$$

Es ist nun

$$y = z_1 + \zeta, \quad y_1 = z_2 + z.$$

Durch Subtraction beider Gleichungen von einander erhält man

$$y - y_1 = (z_1 - z_2) + (\zeta - z).$$

Nun ist aber $BB_1 = JJ_1$, also $y - y_1 = \zeta - z$, woraus $z_2 = z_1$ folgt. Hieraus ergibt sich eine characteristische Eigenschaft der Hauptbrennebene, nämlich die, dass parallele in die Fläche eintretende Strahlenbündel sich stets in ihr durchkreuzen; mit anderen Worten: Die Hauptbrennebene ist Brennebene aller möglichen Strahlencylinder, welche von unendlich entfernten leuchtenden Punctsystemen ausgehen — unendlich entfernte Lichtpuncte haben ihre Brennpuncte in dieser Ebene.

Was hier für die eintretenden Strahlencylinder von der zweiten Hauptbrennebene gilt, muss natürlich auch für parallele gebrochene Strahlen von der ersten Hauptbrennebene gelten. Der hier bewiesene Satz kann zu einer eleganten Construction gebrochener Strahlen verwendet werden.

Es sei NJ (Fig. 16) die Richtung des eintretenden Lichtstrahles. Derselbe treffe die erste Hauptbrennebene in E und die Scheitelebene der brechenden Fläche in J. Der weitere Verlauf des Strahles von E an ist nun offenbar ganz derselbe, ob der leuchtende Punct in N oder in E liegt. Er liege in E und sende den Lichtstrahl NT gegen den Krümmungsmittelpunct der brechenden Fläche. Derselbe geht ungebrochen im zweiten Medium weiter. Es muss nun der andere Lichtstrahl JP_1 parallel zu ET bleiben, weil der Brennpunct von E in unendlicher Entfernung liegt. Hieraus ergibt sich leicht die Construction des gebrochenen Strahles JP_1.

Ist P der leuchtende Punct, so ist zugleich P_1 der Durchschnitt

des Strahles JE_1 mit der Centralen PC des leuchtenden Punctes der conjugirte Punct von P.

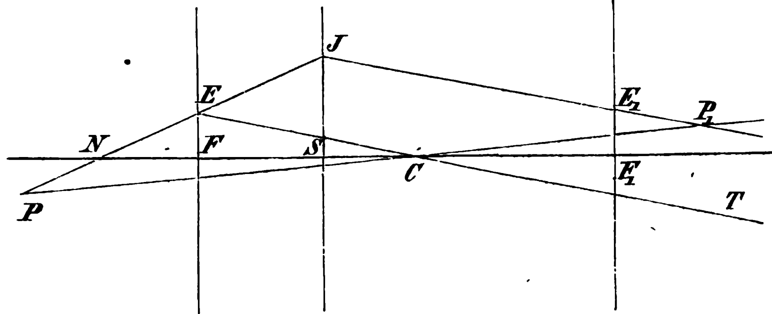


Fig. 16.

Wir wollen nun weiter untersuchen, in welcher Beziehung die *Ordinaten* der conjugirten Puncte zu einander stehen.

Es sei P (Fig. 12) der leuchtende Punct, PJ ein parallel mit der Axe einfallender, PC ein Centralstrahl, $P_1 J_1$ ein Focalstrahl. Der erste geht nach der Brechung durch den zweiten Hauptbrennpunct, der zweite geht ungebrochen weiter, der dritte tritt nach der Brechung parallel mit der Axe aus der brechenden Fläche aus. Alle drei Strahlen convergiren in *einen* Punct P_1, welcher der conjugirte Punct von P ist. Die Ordinaten von P und P_1 seien Y_0 und Y_1. Nach einer früheren Bezeichnung ist $FL = \xi_0$ und $F_1 L_1 = \xi_1$, wobei in dem vorliegenden Falle vorausgesetzt wird, dass ξ_0 negativ, also ξ_1 positiv ist. Bezeichnen wir noch SJ mit y, SJ_1 mit y_1, so ist y der Richtung nach positiv, y_1 dagegen negativ. Aus ähnlichen Dreiecken folgt nun:

$$Y_0 : y_1 = Y_0 : Y_1 = \xi_0 : (-f), \tag{7}$$

$$Y_1 : y = Y_1 : Y_0 = \xi_1 : (-\varphi). \tag{8}$$

Auf diese Weise wird also das Verhältniss der Ordinaten einfach durch eine der Abscissen und durch die Constanten f und φ bestimmt.

Es lassen sich aber noch mehrere andere brauchbare Ausdrücke für dies Verhältnies ableiten, indem man andere Abscissen, z. B. x_0 und x_1, k_0 und k_1 einführt.

Aus Fig. 12 ergibt sich nämlich:

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi}{\varphi - x_1} = \frac{x_0 - f - \varphi}{x_1 - f - \varphi} = \frac{x_0 - r}{x_1 - r} = \frac{k_0}{k_1} \tag{9}$$

$$= \frac{\varphi + k_0}{-f} = \frac{-\varphi}{f + k_1}.$$

Da ferner

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1, \quad 1 + \frac{\varphi\, x_0}{f\, x_1} = \frac{x_0}{f},$$

$$1 - \frac{x_0}{f} = \frac{f - x_0}{f} = -\frac{\varphi\, x_0}{f x_1}$$

ist, so findet man auch die wichtige Gleichung

$$\frac{Y_0}{Y_1} = -\frac{\varphi x_0}{f x_1}. \tag{10}$$

Die in (9) enthaltene Relation

$$Y_0 : Y_1 = (x_0 - r) : (x_1 - r) = k_0 : k_1$$

erhält man einfacher durch die Ueberlegung, dass ein von P in der Richtung der Centralen PC ausfahrender Strahl sich im zweiten Medium ungebrochen fortpflanzt. Da dieser Strahl sich mit allen andern in P_1 durchkreuzt, so ist der conjugirte Punct P_1 in Bezug auf das Centrum C der brechenden Kugelfläche gegen P *perspectivisch* gelegen. (Gleicher Durchgang.)

Zur Gleichung (10) gelangten wir durch Betrachtung der Figur des Trapezes. Dieselbe lässt sich auch, wie Neumann gezeigt hat, durch Anwendung des Satzes von den Ordinaten eines Strahles in den Hauptbrennpuncten deduciren.

Es seien wiederum JJ_1 (Fig. 11) die Scheitelebene der brechenden Fläche, F und F_1 die Hauptbrennpuncte, P und P_1 zwei conjugirte Puncte. Wir verfolgen den Gang desjenigen Strahles, welcher den Scheitel S trifft. Die Ordinate y desselben im Scheitel ist dann Null und $z_1 = -z$. Nun ist

$$Y_0 : z = x_0 : f,$$
$$Y_1 : z_1 = x_1 : \varphi.$$

Hieraus ergibt sich

$$z = Y_0 \cdot \frac{x_0}{f}, \quad z_1 = Y_1 \cdot \frac{x_1}{\varphi},$$

also ebenfalls die Gleichung (10).

Zu ähnlichen Ausdrücken gelangt man, wenn man auch die in § 4. erwähnten Abscissen g und l einführt. Was die Formel (2 b) anbetrifft, so sind die Coordinatenanfangspuncte so gewählt, dass in ihnen die Ordinaten von *gleichem* und *entgegengesetztem* Vorzeichen sind. Aus (2 b) folgt nämlich

$$\frac{f}{2f + g_0} + \frac{\varphi}{2\varphi + g_1} = 1,$$

also $2f + g_0 = x_0$ und $2\varphi + g_1 = x_1$. Da für $g_0 = 0$ auch $g_1 = 0$ werden muss, so hat man in diesem speciellen Falle $x_0 = 2f$, $x_1 = 2\varphi$ und gemäss (9)

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f - (2f)}{f} = -1.$$

Setzt man in (9) für x_0 und x_1 die allgemeinen Werthe $2f + g_0$ und $2\varphi + g_1$ ein, so erhält man bezüglich dieser Coordinatenanfangspuncte

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f + g_0}{-f} = \frac{-\varphi}{\varphi + g_1} = \frac{g_0 + f - \varphi}{g_1 - f + \varphi}. \tag{9 b}$$

Was die Formel (3b) anbetrifft, so sind die Coordinatenanfangspuncte so gewählt, dass für Strahlen, welche von den ersten ausgehen, der symmetrische Durchgang stattfindet. Nach den Deductionen in § 4. ist für conjugirte Puncte bezüglich dieser Anfangspuncte

$$x_0 = l_0 + f - \varphi, \quad x_1 = l_1 - f + \varphi$$

folglich

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{\varphi - l_0}{f} = \frac{\varphi}{f - l_1} = \frac{-l_0}{l_1}. \qquad (9c)$$

§ 8. **Conjugirte Punctsysteme. — Bilder von Objecten.** Es mögen nun beliebig viele Puncte P oder auch Curven, oder Flächen gegeben sein, welche auf einer und derselben zur Axe senkrechten Ebene liegen. Da für alle diese Puncte x_0 constant ist, so ist es auch x_1, d. h. die conjugirten Puncte liegen ebenfalls sämmtlich in einer und derselben zur Axe senkrechten Ebene. Wir wollen zwei solche Ebenen *conjugirte Ebenen* nennen. Da gemäss Formel (9) alle conjugirten Puncte zu einander perspectivisch sind in Bezug auf das Centrum C, so wird jedem leuchtenden Elemente der ersten Ebene ein Bild in der zweiten entsprechen, kurz, die zweite Ebene ist das *Bild* der ersteren. Es versteht sich von selbst, dass das Verhältniss der Abstände der beiden conjugirten Ebenen oder des Bildes vom Objecte ebenso wie bei einzelnen Puncten abhängig ist von dem Verhältnisse n der optischen Dichtigkeiten der beiden Medien, sowie vom Krümmungsradius der brechenden Fläche.

Stellt das Punctsystem (P) der ersten Ebene eine zur Axe senkrechte Linie oder die Figur eines Pfeiles vor, so wird das Bild desselben ebenfalls die Figur eines zur Axe senkrechten geraden Pfeiles wiedergeben.

Von besonderem Interesse ist noch die Lage des conjugirten Punctsystems für ein Punctsystem oder Object der Scheitelebene. Für $x_0 = 0$ ist auch $x_1 = 0$ und $Y_1 = Y_0$. Ist $r = \infty$, (Ebene), so ist immer $Y_1 = Y_0$.

Es hat demgemäss die Scheitelebene die characteristische Eigenschaft, dass jeder Punct derselben sein eigener Bildpunct, kurz, dass die Scheitelebene zugleich ihr eignes Bild ist. Wir wollen ihr deswegen den Namen *Hauptebene* geben.

Ausser dem Scheitelpuncte S hat aber auch noch das Centrum C die Eigenschaft, sein eignes Bild zu sein. Wir erhalten nämlich diejenigen Puncte und Flächen, für welche Object und Bild congruent sind, wenn wir $Y_1 = Y_0$ setzen. Aus Formel (9) ergibt sich hierfür zunächst die Bedingung $x_0 = 0$ und $x_1 = 0$, also für den Scheitelpunct. Dann aber auch noch $x_0 - r = x_1 - r$, also $x_1 = x_0 = r$. Dies gilt aber nur vom Puncte C allein und nicht von der ganzen Normalebene des Centrums C. Denn aus Gleichung (10) folgt jetzt weiter

$$Y_0 : Y_1 = \varphi : (-f),$$

darum nur $Y_1 = Y_0$, wenn $Y_0 = 0$ ist. Für die conjugirten Puncte der Normalebene des Centrums ist also allgemein

$$Y_0 = n\,Y_1.$$

Wenn das Punctsystem eine gegen die Axe gerichtete Linie PT (Fig. 17) darstellt, so wird das Bild derselben ebenfalls eine zur Axe geneigte Linie $P_1 T_1$ sein, wobei die Neigungswinkel α und α_1 im

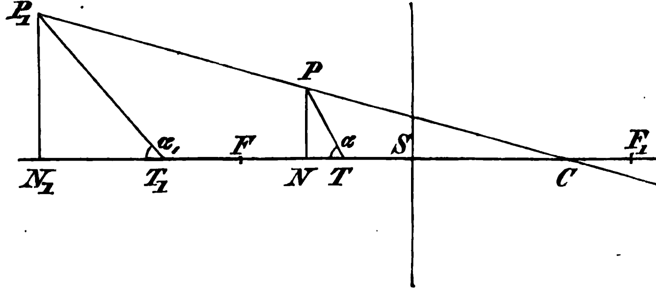


Fig. 17.

Allgemeinen von einander verschieden sind. Es sei P ein Punct des Objects PT, welches unter dem Winkel α gegen die Axe geneigt ist; P_1 der perspectivisch in Bezug auf das Centrum C gelegene Bildpunct. Ferner seien Y_0 und Y_1 die Ordinaten dieser Puncte, T_1 der conjugirte Punct von T, $TN = t_0$ und $T_1 N_1 = t_1$ die Abscissen der Puncte P und P_1 bezüglich der conjugirten Puncte T und T_1. Ebenso seien $SN = x_0$ und $SN_1 = x_1$ die Abscissen in Bezug auf S.

Ist nun $TF = f_1$ und $T_1 F_1 = \varphi_1$, also f_1 negativ und φ_1 positiv, so ist gemäss Formel (4)

$$\frac{(+f_1)}{t_0} + \frac{(+\varphi_1)}{t_1} = 1.$$

Weiter ist nach Formel (9)

$$Y_0 : Y_1 = (f - x_0) : f$$

und weil $SN = SF - TF + TN$ ist, so ist $x_0 = f - f_1 + t_0$,

$$Y_0 = \frac{f_1 - t_0}{f}\,Y_1, \quad t_0 = \frac{+f_1 t_1}{t_1 - \varphi_1}.$$

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so erhält man

$$\frac{Y_0}{t_0} = \tan\alpha = -\,Y_1\,\frac{(f_1 - t_0)(\varphi_1 - t_1)}{f f_1 t_1} = +\,Y_1\,\frac{f_1 - t_0}{f t_0} = -\,Y_1\,\frac{\varphi_1}{f t_1}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{Y_1}{t_1} = -\,\frac{f}{\varphi_1}\tan\alpha = \tan\alpha_1.$$

Dies ist die Gleichung einer *Geraden* und man hat

$$\tan\alpha_1 : \tan\alpha = (-f) : \varphi_1. \tag{11}$$

Ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so ist es auch α_1, d. h. Object und Bild stehen senkrecht zur Axe. Ist $\alpha = 0$, so ist es auch α_1 — Object und Bild liegen in der Axe.

Da in unserem Falle φ_1 gegen f_1 verhältnissmässig gross ist, so ist α_1 verhältnissmässig klein gegen α. Liegt die Objectebene PT senkrecht zur Ebene der Tafel, so findet dasselbe für die Bildebene $P_1 T_1$ Statt.

§ 9. **Von der Krümmung der Bilder bei der Brechung der Lichtstrahlen durch eine einzige sphärische Fläche.** Es ist in § 8. gezeigt worden, dass bei einer einzigen Fläche das Bild einer zur Axe senkrechten verhältnissmässig kleinen Ebene wiederum als eben zu betrachten sei, dass also keine Verzerrung oder Krümmung des Bildes stattfinde. Die Formel (11) gibt nämlich an, dass der Winkel α_1 nur von $F_1 T_1$, nicht aber von PN abhängig sei. Dies ist aber nicht mehr der Fall für grosse Objecte. Bei einer genaueren Betrachtung der Entfernungen je zweier conjugirter Puncte P und P_1 vom Centrum C nämlich springt es leicht in die Augen, dass wenn sie denselben Ordinaten PN und $P_1 N_1$ (Fig. 18) angehören, die Abstände PC und $P_1 C$ bei wachsendem Winkel NCP gleichzeitig wachsen, während doch aus der allgemeinen dioptrischen Formel (2), welche bei *einer* brechenden Fläche auch für jede andere durch das Centrum C gelegte Axe, z. B. für PC Gültigkeit hat, die folgenden Bedingungen stattfinden:

a) Es muss z. B. für $x_0 > f$, x_1 positiv und grösser als φ sein, und für wachsende x_0 muss der Abstand x_1 des Bildes vom Scheitel S_1 immer kleiner werden; mit andern Worten, das Bild des entfernteren Punctes P kann nicht in P_1, d. h. in der zu PN conjugirten Ebene $P_1 N_1$ liegen, sondern muss in der fingirten optischen Axe PC dem Centrum C sogar noch näher liegen als selbst der Punct N_1.

Fig. 18.

b) Es findet demzufolge nur in dem Falle keine Verzerrung oder Krümmung des Bildes eines ebenen Punctsystems Statt, wenn dieses System auf einer mit der brechenden Fläche homocentrischen

Kugelfläche NP_3 liegt, indem alsdann auch jedenfalls das conjugirte Punctsystem auf einer homocentrischen Kugelfläche $N_1 P_2$ liegen muss.

Nach diesen Bemerkungen dürfte es geboten erscheinen, die Grenzen zu definiren, bis zu welchen die Annahme der relativen Ausdehnung des Objects NP noch gestattet ist, um die Gültigkeit eines wichtigen Theorems zu sichern, welches an sich nur den Werth einer Näherungsformel beansprucht.

Wir wollen zu dem Zwecke die Krümmung des Bildes, genauer genommen den Krümmungsradius ϱ_2 der Bildfläche $O_1 P_1$ (Fig. 19) zu bestimmen suchen, indem wir der Allgemeinheit wegen zugleich

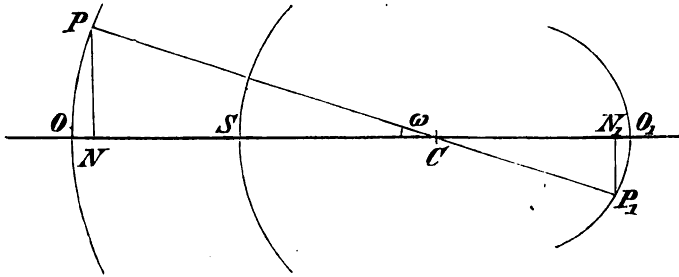


Fig. 19.

voraussetzen, dass das Punctsystem des Objects auf der sehr kleinen Scheitelfläche einer Kugel vom Radius ϱ_1 oder noch einfacher auf einem Rotationsparaboloide liege, dessen Scheitel mit O und dessen Axe mit der optischen Axe zusammenfällt. Die Durchmesser der fingirten Kugelflächen sind die Parameter der Berührungsparaboloide und die Gleichungen der Axenschnitte

$$y^2 = 2\varrho_1 z, \qquad \eta^2 = 2\varrho_2 \zeta,$$

wenn $PN = y$, $ON = z$, $P_1 N_1 = \eta$, $O_1 N_1 = \zeta$ gesetzt wird.

Wir suchen nach einer Beziehung zwischen ϱ_1, ϱ_2, r und n. Es sei also OP der Parabelbogen eines Objects, $O_1 P_1$ der seines Bildes. Rechnet man die Abscissen vom perspectivischen Pole C, so ist gemäss Formel (3)

$$\frac{(-\varphi)}{k_0} + \frac{(-f)}{k_1} = 1,$$

und

$$\frac{-\varphi}{CN} + \frac{-f}{CN_1} = \frac{1}{\cos\omega} = 1 + \frac{1}{2}\omega^2.$$

Nun ist

$$CN = k_0 \cos\omega = k_0\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2\right),$$

$$CN_1 = k_1 \cos\omega = k_1\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2\right);$$

ferner mit Berücksichtigung des Vorzeichens der Richtungen

$$CO = CN - z = CN - \frac{y^2}{2\varrho_1} = CN - CN^2 \frac{\omega^2}{2\varrho_1},$$

$$CO_1 = CN_1 - \zeta = CN_1 - \frac{\eta^2}{2\varrho_2} = CN_1 - CN_1^2 \frac{\omega^2}{2\varrho_2}.$$

Setzt man diese Werthe in Formel (3) ein, so erhält man

$$\frac{-\varphi}{CN}\left(1 + CN\frac{\omega^2}{2\varrho_1}\right) + \frac{-f}{CN_1}\left(1 + CN_1\frac{\omega^2}{2\varrho_2}\right) = 1,$$

und wenn man die Gleichung

$$\frac{(-\varphi)}{CN} + \frac{(-f)}{CN_1} = 1 + \frac{1}{2}\omega^2$$

subtrahirt, so bleibt

$$\frac{\varphi}{\varrho_1} + \frac{f}{\varrho_2} = 1. \qquad (12)$$

Demnach ist die Krümmung der Bilder von der Entfernung des Objects unabhängig. Ist $\varrho_1 = \infty$, also die Oberfläche eine Ebene, so ist $\varrho_2 = f$, d. h. in unserm Falle ist die Bildfläche nach links *concav* und ζ negativ. Ist r negativ, so ist $\varrho_2 = -f$, also positiv und die Bildfläche nach rechts concav. Ist $\varrho_2 = \infty$, soll also die Bildfläche eine Ebene sein, so muss $\varrho_1 = \varphi$, also die Objectfläche nach rechts concav sein.

Wenn nun die Krümmung der Bildfläche unmerklich bleiben soll, so muss, wegen der Gleichung $\eta^2 = 2f\zeta$ und weil dann ζ sehr klein gegen η sein soll, η sehr klein gegen $2f$ oder gegen r bleiben.

Dies entspricht allerdings unsern in der Einleitung aufgestellten Einschränkungen des allgemeinen dioptrischen Problems. Wird η eine Grösse von der Ordnung r, z. B. gleich $2f$, so ist zugleich $\zeta = 2f$ und

$$k_1 : k_0 = \eta : y = 2f : y,$$

$$k_1 = 2fk_0 : y,$$

also

$$\frac{(-\varphi)}{k_0} - \frac{y}{2k_0} = 1, \quad k_0 = -\varphi - \frac{1}{2}y.$$

Da y klein gegen k_0 bleiben soll, so ist nahezu $k_0 = -\varphi = f - r$. Die Krümmung des Bildes wird demnach beträchtlich, wenn das Object in der Nähe des ersten Hauptbrennpunctes liegt, selbst in dem Falle, wenn y gegen k_0 sehr klein ist.

§ 10. **Von den Bildflächen beliebig grosser Objectflächen.** In dem neunten Abschnitte wurde die Krümmung der Bildfläche von verhältnissmässig kleinen Objectflächen untersucht, indem nur Strahlen in die Betrachtung gezogen wurden, die von der optischen Axe wenig abweichen. Betrachtet man aber sehr grosse Objecte, so muss man zu einer genauen Bestimmung des Ortes ihrer Bilder die optische Axe variabel annehmen und hierzu die jedesmalige Centrale PC des Objectpunctes P wählen. Man betrachtet in diesem Falle den Weg

derjenigen Strahlen, welche nur wenig von dieser Centralen abweichen und bestimmt die Bildpuncte der kleinsten Aberration.

Wir wollen also jetzt von beliebigen Objectflächen die Bildflächen der kleinsten Aberration untersuchen und zunächst in einem speciellen Falle voraussetzen, dass die Objectfläche eine unendliche Ebene sei.

Die Objectebene sei PT (Fig. 20) und zwar senkrecht gegen die Hauptaxe FC gelegen. Es seien ferner F und F_1 die Hauptbrennpuncte der brechenden Kugelfläche CS, T_1 der conjugirte Punct von T, so ist T_1 das Bild der kleinsten Aberration von T. Für den Punct P der Objectebene haben wir die Centrale PC als optische Axe zu nehmen; in diesem Falle sei P_1 das Bild der kleinsten Aberration von P in Bezug auf die Nebenaxe PC oder FC. Der Winkel, welchen die Nebenaxe mit der Hauptaxe bildet, sei ϑ und α der Winkel, welchen die Nebenaxe mit der Ebene bildet, endlich α_1 der Winkel, welchen das Flächenelement des Bildes P_1 mit der Nebenaxe bildet. Die Beziehung zwischen α und α_1 ist im achten Abschnitte bestimmt durch Formel (11).

Fig. 20.

Bezeichnen wir den Abstand CT_1 mit a, den Abstand CP_1 mit ϱ, so erhält man nach Formel (3)

$$CT = -\frac{\varphi a}{f+a}, \quad CP = -\frac{\varphi \varrho}{f+\varrho}.$$

Nun ist $CT : CP = \sin\alpha = \cos\vartheta$ und

$$\varrho \left\{ \frac{f+a}{a} \cos\vartheta - 1 \right\} = f.$$

Dies ist aber die Polargleichung einer *Hyperbel*. Das Bild der Ebene TP ist demnach ein Hyperboloid $T_1 P_1$, wovon die eine Schale das Bild des Kreises vom Radius TP_2 ist. Für den Punct P_2 ist nämlich

$$\sin\alpha = CT : CF = CT : (-\varphi) = a : (f + a),$$

also $\varrho = \pm\infty$. Die zweite Schale des Hyperboloides liegt hinter der brechenden Fläche und ist das *reelle* Bild des übrigen Theiles der unendlichen Ebene. C ist der Brennpunct dieser zweiten Schale. Um die Halbaxen A und B des Hyperboloids zu bestimmen, gehe man aus von der Polargleichung

$$\varrho \left\{ \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A} \cos\vartheta - 1 \right\} = \frac{B^2}{A}.$$

Vergleicht man diese mit der oben abgeleiteten Polargleichung, so findet man

$$A = \frac{a^2}{f + 2a} \quad \text{(grosse halbe Axe)},$$

$$B = \sqrt{\frac{a^2 f}{f + 2a}} \quad \text{(kleine halbe Axe)}.$$

Das Hyperboloid ist ein *hyperboloide à deux nappes.* Die Entfernung des Scheitels der zweiten Schale vom Centrum C ist

$$\varrho_2 = \frac{af}{f + 2a}$$

und die Entfernung des Scheitels T_1 der ersten Schale vom Centrum

$$\varrho_1 = a.$$

Die Asymptote des oberen Zweiges $T_1 P_1$ läuft mit der Linie CP_2 parallel. Für diesen Fall ist nämlich

$$\tan\vartheta = -\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{f(f+2a)}{a^2}} = \sqrt{\frac{\varphi^2 - CT^2}{CT^2}} = \frac{TP_2}{CT}.$$

Da der Winkel ϑ nur 90^0 werden kann, so beschränkt sich die Ausdehnung des reellen Bildes auf ein durch die Centralebene abgestumpftes Hyperboloid, dessen kreisförmige Oeffnung den Radius f hat. Das fehlende Segment ist offenbar das Stück $F_1 T_2 \Phi_1$.

Um die Gleichung in eine von rechtwinkligen Coordinaten zu verwandeln, setzen wir

$$\varrho \sin\vartheta = \eta, \quad \varrho \cos\vartheta = a + \zeta.$$

Eliminirt man ϱ und ϑ, so wird

$$\cos\vartheta = \frac{a + \zeta}{\varrho}, \quad \varrho^2 = \eta^2 + (a + \zeta)^2,$$

und wenn man die Glieder ordnet:

$$\eta^2 = \frac{f(f+2a)}{a^2} \zeta^2 + 2f\zeta.$$

Ist ζ sehr klein, so erhält man die Berührungscurve in T_1, nämlich die Parabel

$$\eta^2 = 2f\zeta,$$

also ganz den Deductionen in § 9 entsprechend.

Betrachten wir noch die Neigung von $P_1 U$ gegen $P_1 C$, also den Winkel α_1, so fanden wir in Formel (11)

$$\tan\alpha_1 : \tan\alpha = (-f) : \varphi_1 = f : (f + \varrho),$$

also

$$\tan\alpha : \tan\alpha_1 = 1 + \frac{\varrho}{f} = \frac{\frac{f+a}{a}\sin\alpha}{\frac{f+a}{a}\sin\alpha - 1}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha - \tan\alpha_1} = \frac{f+a}{a}\sin\alpha.$$

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin(90 - \alpha_1)} = \frac{a}{f+a} = \frac{\cos\tau}{\cos\alpha_1},$$

woraus sich eine neue Beziehung zwischen α und α_1 ergibt.

Es muss ferner $\alpha < 90^0$ sein. Wird $\alpha_1 = 0$, so wird zugleich

$$\sin\alpha = \cos\vartheta = a : (f + a) = CT : \varphi,$$

was sich ebenfalls aus der Discussion der Hyperbelgleichung bereits ergeben hat.

Substituirt man allgemein für die Ebene TP eine Fläche zweiter Ordnung, so ist es auch die Bildfläche der kleinsten Aberration. In diesem Falle ist nämlich

$$CP\,(m\cos\vartheta - 1) = -n$$

und auch

$$CP\,(f + \varrho) = -\varphi\varrho.$$

Hieraus ergibt sich

$$\varrho\left\{\frac{\varphi m}{\varphi + n}\cos\vartheta - 1\right\} = \frac{fn}{\varphi + n}.$$

welches gleichfalls die Polargleichung eines Kegelschnittes ist. Ist ganz allgemein

$$CP = \psi(\vartheta),$$

so ist

$$\varrho\,\frac{\psi(\vartheta) + \varphi}{\psi(\vartheta)} = -f. \qquad (13)$$

Relationen der Object- und Bildgrössen zu den Divergenzwinkeln zweier einfallenden und gebrochenen Strahlen. Es lässt sich nun noch eine weitere Beziehung für das Verhältniss der Ordinaten zweier conjugirter Puncte oder für das Verhältniss senkrechter Object- und Bildgrössen auffinden, wobei die Abscissen und Focaldistanzen nicht bekannt zu sein brauchen. § 11.

Es seien P und P_1 (Fig. 21) zwei conjugirte Puncte, PJ und PS zwei einfallende, $P_1 J$ und $P_1 S$ die gebrochenen Strahlen. Der Divergenzwinkel SPJ werde mit α_0, der Winkel $SP_1 J$ mit α_1 bezeichnet. Sind $PN = Y_0$, $P_1 N_1 = Y_1$ die Ordinaten, $SN = x_0$,

$SN_1 = x_1$ die Abscissen der Puncte P und P_1, so ist es wegen der Kleinheit der Winkel α_0 und α_1 gestattet, $JNS = JPS$, $JN_1S = JP_1S$ zu setzen. Nun ist

$$JS = x_0 \tan\alpha_0 = x_1 \tan\alpha_1,$$

und weiter

$$Y_1 : Y_0 = -fx_1 : \varphi x_0 = -f\tan\alpha_0 : \varphi\tan\alpha_1,$$

folglich

$$-Y_0 f\tan\alpha_0 = Y_1 \varphi \tan\alpha_1$$

oder

$$Y_0 \tan\alpha_0 = n\, Y_1 \tan\alpha_1.$$

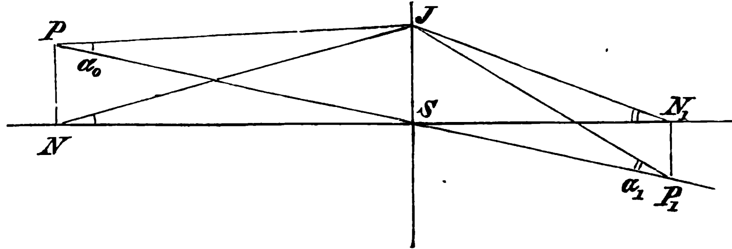


Fig. 21.

Sind n_0 und n_1 die absoluten Brechungsindices des ersten und zweiten Mediums, v_0 und v_1 die Lichtgeschwindigkeiten in denselben, so ist

$$n_0\, Y_0 \tan\alpha_0 = n_1\, Y_1 \tan\alpha_1 \qquad (14)$$

und

$$\frac{Y_0 \tan\alpha_0}{v_0} = \frac{Y_1 \tan\alpha_1}{v_1}.$$

§ 12. **Uebertragung der Sätze über die Bildgrössen auf die Spiegelung von Objecten an sphärischen Flächen.** Die Formeln für die Grösse der Spiegelbilder erhält man leicht, indem man $n = -1$ setzt. Es war nun in § 7 Formel (9) und (10)

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi}{\varphi - x_1} = \frac{x_0 - f - \varphi}{x_1 - f - \varphi} = \frac{x_0 - r}{x_1 - r} = \frac{\varphi x_0}{-f x_1},$$

und wegen (14) auch noch

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{\varphi x_0}{-f x_1} = \frac{\varphi \tan\alpha_1}{-f\tan\alpha_0} = \frac{n_1 \tan\alpha_1}{n_0 \tan\alpha_0}.$$

Ferner ist in unserm Falle für einen Convexspiegel

$$f = -\frac{r}{n-1} = \frac{1}{2}r, \quad \varphi = \frac{nr}{n-1} = \frac{1}{2}r,$$

und für einen Concavspiegel

$$f = -\frac{1}{2}r, \quad \varphi = -\frac{1}{2}r.$$

Demnach gibt es bei sphärischen Spiegeln nur *einen* Hauptbrenn-

punct und zwar haben die Convexspiegel eine *positive*, die Concavspiegel eine *negative* Brennweite.

Wir betrachten zunächst die Verhältnisse bei einem Concavspiegel. Es sei C (Fig. 21) der geometrische, S der optische Mittelpunct oder der Scheitelpunct des Spiegels, also SC die optische Axe.

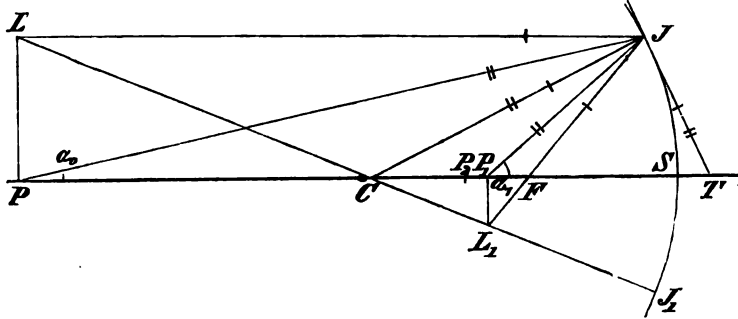


Fig. 22.

Ferner sei $LP = Y_0$ ein senkrecht zur Axe gerichtetes Object, $L_1 P_1 = Y_1$ das zugehörige Bild. Aus den Formeln für die Bildgrössen ergibt sich nun

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{\frac{1}{2}r + x_0}{\frac{1}{2}r} = \frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r + x_1} = \frac{x_0 + r}{x_1 + r} = \frac{x_0}{-x_1} = \frac{-\tan\alpha_1}{\tan\alpha_0}.$$

Für die Abscissen $SP = x_0$ und $SP_1 = x_1$ gilt die Gleichung

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} = -\frac{2}{r}.$$

Die vorstehenden Formeln lassen sich direct sehr leicht mittels Anwendung der Lehrsätze über harmonische Strahlenbündel ableiten. Um den conjugirten Punct L_1 des leuchtenden Punctes L zu construiren, ziehe man den Centralstrahl LCJ_1 und den Strahl LJ parallel zur optischen Axe. Der erstere kehrt nach der Reflexion in J_1 in sich selbst zurück; der andere geht nach der Reflexion in J durch den Focus F und bildet mit CJ gleiche Winkel. Die beiden reflectirten Strahlen schneiden sich in L_1. Da CJ senkrecht zur Tangente JT steht und wegen der Kleinheit des Bogens SJ die Tangente mit dem Bogen vertauscht werden kann, so bilden JS, JF, JC und JL ein harmonisches Strahlenbündel. Weil nun die Transversale SP dem vierten Strahle parallel ist, so ist $SF = FC = \frac{1}{2} r$.

Wir denken uns ein zweites Strahlenpaar von P ausgehend und zwar PS, welcher in sich selbst zurückgeworfen wird, und PJ, welcher sich mit dem ersteren in P_1 durchschneidet. Die Strahlen PJ und JP_1 bilden mit dem Radius CJ ebenfalls gleiche Winkel;

es sind also auch JP, JC, JP_1 und JS harmonische Strahlen. Deswegen gelten die Gleichungen

$$CP : -CP_1 = SP : SP_1$$

oder

$$(x_0 + r) : (-x_1 - r) = x_0 : x_1,$$

indem hier auf die Richtung der in Betracht kommenden Abstände Rücksicht zu nehmen ist. Durch Umformung der letzten Gleichung erhält man, wie oben

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} = -\frac{2}{r}, \quad -r = \frac{2\,x_0 x_1}{x_0 + x_1}.$$

In Worten würde diese Formel lauten: der Krümmungsradius der spiegelnden Fläche ist das harmonische Mittel zwischen den Abscissen der conjugirten Puncte bezüglich des optischen Mittelpuncts.

Um ferner zu zeigen, dass die Abscissenformel auch für die Puncte L und L_1 Gültigkeit hat, so denken wir uns eine Senkrechte $L_1 P_2$ gegen die Axe gefällt. Es lässt sich zeigen, dass P_2 mit P_1 coincidirt. Aus ähnlichen Dreiecken folgt nämlich

$$\frac{CP}{CP_2} = \frac{PL}{P_2 L_1} = \frac{SJ}{P_2 L_1} = \frac{FS}{FP_2} = \frac{FC}{FP_2}$$

und durch Zusammensetzung der Verhältnissglieder

$$\frac{CP + FC}{CP_2 + FP_2} = \frac{PF}{CF} = \frac{FC}{FP_2}.$$

Hieraus geht hervor, dass auch JP, JC, JP_2 und JS ein harmonisches Strahlenbündel bilden. Es waren aber vorhin $PC\ P_1 S$ harmonische Puncte, jetzt auch $PC\ P_2 S$; folglich sind wegen ihrer Einwerthigkeit P_2 und P_1 identisch. Es gilt die Abscissengleichung also für alle Puncte derselben Ordinate PL.

Das Verhältniss der Ordinaten Y_0 und Y_1 ergibt sich nun leicht aus den vorhergehenden Proportionen:

$$Y_0 : Y_1 = CP : CP_1 = SP : (-SP_1) = x_0 : (-x_1),$$

in Worten:

a) die Abstände zweier conjugirter Puncte vom Centrum verhalten sich wie ihre Abstände vom optischen Mittelpuncte;

b) die Object- und Bildgrössen verhalten sich wie die Abstände vom Centrum oder vom optischen Mittelpunct.

Da ferner

$$\tan\alpha = \frac{JS}{PS}, \quad \tan\alpha_1 = \frac{JS}{P_1 S}$$

ist, so erhält man auch noch

$$Y_0 : Y_1 = -\tan\alpha_1 : \tan\alpha_0.$$

Bezeichnet man die Abstände der conjugirten Puncte vom Centrum wie früher mit k_0 und k_1, so ist für den Concavspiegel noch

$$\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} = \frac{2}{r}, \quad r = \frac{2\,k_0 k_1}{k_0 + k_1},$$

in Worten ausgedrückt: Der Krümmungsradius der spiegelnden Fläche ist das harmonische Mittel zwischen den Abscissen der conjugirten Puncte bezüglich des Centrums.

Bezeichnet man die Abstände zweier conjugirter Puncte von dem Hauptbrennpuncte F wie früher mit $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{x}_1$, so ergibt sich noch aus der oben abgeleiteten Proportion

$$PF : CF = CF : P_2F$$

oder

$$\mathfrak{x}_0 : \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r : \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1 = \frac{1}{4}r^2,$$

in Worten: der halbe Krümmungsradius der spiegelnden Fläche ist das geometrische Mittel zwischen den Abscissen der conjugirten Puncte bezüglich des Hauptbrennpuncts.

Man erhält die Formeln für den Convexspiegel, wenn man überall r an die Stelle von $-r$ einsetzt.

Was die Krümmung der Bilder anbetrifft, so ist gemäss Formel (12)

$$\frac{\varphi}{\varrho_1} + \frac{f}{\varrho_2} = 1,$$

für den Concavspiegel

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2}{r},$$

für den Convexspiegel

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{2}{r},$$

für den ebenen Spiegel

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = 0.$$

Ist $\varrho_1 = \infty$, so ist bei dem Concavspiegel $\varrho_2 = \frac{1}{2}r$, also positiv und die Bildfläche gegen den Spiegel concav; bei dem Convexspiegel ist $\varrho_2 = -\frac{1}{2}r$, also die Bildfläche ebenfalls gegen den Spiegel concav. Bei dem ebenen Spiegel sind Object- und Bildfläche symmetrisch und gegen einen unendlich entfernten Punct perspectivisch gelegen.

Die Bildflächen kleinster Aberration von beliebig grossen Objecten erhält man aus den in § 10 entwickelten Formeln, wenn man $n = -1$ setzt.

Verallgemeinerung der Definitionen. Vorläufige Erwähnung der sechs Cardinalpuncte. Bei den vorangehenden Betrachtungen geben sich besonders vier Puncte in der optischen Axe als characteristische Puncte zu erkennen; die beiden Hauptbrennpuncte, der Scheitelpunct der brechenden Fläche und ihr Centrum. Es sollen hier die Haupteigenschaften derselben, so wie die der Ebenen, welche § 13.

die optische Axe in ihnen senkrecht durchschneiden, zusammengestellt werden.

Der *erste* und *zweite Hauptbrennpunct* einer einzigen brechenden Fläche sind die Convergenzpuncte derjenigen Strahlen, welche beziehlich im zweiten und ersten Medium parallel laufen.

Der *erste Hauptbrennpunct* F ist dadurch bestimmt, dass jeder Strahl, der vor der Brechung gegen ihn gerichtet ist, nach der Brechung parallel mit der Axe austritt.

Der *zweite Hauptbrennpunct* F_1 ist dadurch bestimmt, dass gegen ihn jeder Strahl gerichtet ist, welcher vor seiner Brechung der Axe parallel läuft.

Bei einem System von zwei oder mehr Flächen existiren ebenfalls *zwei*, aber auch nur zwei solche Puncte.

Die *erste* und *Hauptbrennebene* sind diejenigen Ebenen, in welchen irgend welche unter sich parallele Strahlen im zweiten oder ersten Medium verlaufend convergiren. Sie stehen in den Hauptbrennpuncten zur Axe senkrecht. Strahlenkegel, welche von ihnen auslaufen oder sich in ihnen kreuzen in dem *einen* Medium, laufen in dem andern nach bestimmten Richtungen parallel; sie werden demnach Strahlencylinder.

Die *Scheitelebene* (Hauptebene) ist dadurch characterisirt, dass Objecte, die in ihr liegen, ihre eignen Bilder sind, also homothetische und gleich grosse Bilder haben. Ferner dadurch, dass die von den Brennpuncten gegen sie treffenden Strahlen sich mit den gebrochenen der Axe parallel laufenden Strahlen in ihr schneiden. Sämmtliche Strahlen also, welche auf der einen Seite gegen irgend einen Punct derselben convergiren, divergiren auf der anderen; jedoch in veränderter Richtung.

Der *Scheitelpunct* S ist *Hauptpunct*. Bei einem System von zwei oder mehreren brechenden Flächen und Medien existiren immer *zwei* und zwar *nur* zwei Ebenen resp. Puncte H_α und H_β dieser Eigenschaft. In dem Falle einer einzigen Fläche verhält es sich also so, als wenn die eine Hauptebene sich in zwei auflöst, in die des Objects und in die des Bildes. Bei einem Systeme von mehreren Flächen liegen sie aber im Allgemeinen nicht in der ersten und letzten Fläche. Sie können ausser- und innerhalb des brechenden Systemes liegen.

Das *Centrum* der brechenden Fläche (der perspectivische Pol der conjugirten Puncte oder der *Knotenpunct*) ist dadurch characterisirt, dass jeder gegen denselben gerichtete im ersten Medium verlaufende Strahl in unveränderter Richtung jenseits desselben fortläuft, dass also ein in ihm gelegenes Object (reell oder virtuell) sein eignes Bild ist. Dies gilt jedoch nicht von der in derselben senkrecht zur Axe gerichteten Ebene (Centralebene, Knotenebene), wiewol Object und Bild zugleich in ihr liegen.

Bei Systemen von zwei oder mehr brechenden Flächen existiren immer *zwei* Knotenpuncte K_α und K_β von derselben Eigenschaft, mit der Erweiterung jedoch, dass der im ersten Medium gegen den einen Knotenpunct gerichtete Strahl durch das System so gebrochen wird, dass er beim Austritte parallel mit dem einfallenden Strahle so verläuft, als ob er aus dem zweiten Knotenpuncte käme. Der eine Knotenpunct ist dann das Bild des anderen. Ferner ist die eine Knotenebene das Bild der anderen, aber Object und Bild sind nicht congruent. Die erwähnten sechs Puncte werden *Fundamentalpuncte* oder auch *Cardinalpuncte* eines brechenden Systems genannt.

Die Gesetze des Durchganges der Lichtstrahlen durch ein System von centrirten Kugelflächen. — Hauptpuncte von Gauss. § 14.
Wir gehen in der bisherigen Weise elementarer Betrachtungen einen neuen Schritt vorwärts und versuchen zunächst die gefundenen Sätze auf ein System von Flächen zu übertragen, so weit sich noch keine besondern Schwierigkeiten des Calcüls entgegenstellen.

Ein beliebiger im ersten Medium M_0 befindlicher Lichtkegel wird auch noch nach dem Durchgange durch eine Reihe brechender Kugelflächen, mögen diese centrirt, d. h. coaxial sein oder nicht, im letzten Medium wieder in einen einzigen Punct convergiren oder aus einem rückwärts gelegenen Punct divergiren.

Sind die Flächen centrirt, so liegen sämmtliche Brennpuncte P_1, P_2, P_3, ... der Medien M_1, M_2, M_3, ... in demselben Axenschnitte. Ein jeder Lichtstrahl wird so viele Brechungen erleiden, als brechende Flächen vorhanden siud. Zum Beweise der hier ausgesprochenen Sätze kann man den in § 4 und § 7 für eine einzige brechende Fläche bewiesenen Satz nach einander auf alle Flächen eines Systems ausdehnen.

Liegt der leuchtende Punct P_0 in der optischen Axe, so liegen auch die einzelnen Brennpuncte P_1, P_2, P_3 .... bezüglich der Medien M_1, M_2, M_3 .... in dieser Axe.

Unter diesen partiellen Brennpuncten oder Bildern von dem Object P_0 kann es sowol reelle als virtuelle geben. Sie sind reell, wenn die Convergenz der in einem Medium gebrochenen Lichtstrahlen in einem Punct wirklich zu Stande kommt; sie sind virtuell oder imaginär, wenn die Strahlen früher in das nächstfolgende Medium übergehen, ehe sie sich kreuzen oder wenn sie divergiren aus einem in den vorangehenden Medien gelegenen Puncte. Wir werden jedoch in der Folge immer von den Partialbildern bezüglich der einzelnen Medien sprechen, einerlei, ob sie zu Stande kommen oder nicht, ob sie reell oder virtuell sind.

Unter *conjugirten Puncten* bezüglich des ersten und letzten Mediums verstehen wir die Durchkreuzungspuncte der in die Vorderfläche

des Systems eintretenden und der aus der Hinterfläche austretenden Strahlen; also den leuchtenden Punct im ersten Medium M_0 vor der Vorderfläche nebst dem Partialbilde desselben im letzten Medium M_m hinter dem Systeme. Der leuchtende Punct kann übrigens ebenfalls virtuell sein, wenn ein gegen einen innerhalb des Systems gelegenen Punct convergirender Strahlenkegel in die Vorderfläche einfällt.

Schneiden sich also irgend zwei in die Vorderfläche eintretende Strahlen im Puncte P und ebenso wieder nach dem Austritte aus dem Systeme in P_1, so sind P und P_1 *conjugirte Puncte κατ' ἐξοχήν*.

Kommen die einfallenden Strahlen aus einem in der Axe gelegenen unendlich weit entfernten Puncte her, mit andern Worten: laufen sie in Strahlencylindern der Axe parallel, so convergiren sie nach der Brechung in einen Punct Φ; treten die gebrochenen Strahlen nach sämmtlichen Brechungen innerhalb des Systems parallel mit der Axe aus, so haben sie ihren Ausgangspunct in einem in der Axe gelegenen Puncte F. Die Puncte F und Φ sind die beiden Hauptbrennpuncte des Systems; F ist *erster*, Φ *zweiter Hauptbrennpunct.* Es ist dabei der Fall nicht ausgeschlossen, dass beide in unendlicher Entfernung vom System liegen.

Es lässt sich nun zunächst zeigen, dass, wenn man irgend zwei in der Axe gelegene conjugirte Puncte als Anfangspuncte der Abscissen irgend zweier anderer conjugirter Puncte wählt, man jedesmal wie bei einer brechenden Fläche (§ 4. Formel 4) stets wieder zu einer Gleichung von derselben Form gelangt, wie viele brechende Flächen man auch voraussetzt. Diese allgemeine Abscissenformel lautet

$$\frac{f_1}{t_0} + \frac{\varphi_1}{t_m} = 1.$$

Um dies zu beweisen, bedienen wir uns der Kästnerschen „Methode des Schlusses von $m - 1$ auf m“. Es lässt sich nämlich erweisen, dass, wenn das Theorem für $m - 1$ Flächen gilt, es auch für m Flächen gelten muss.

Voraussetzung: Es sei

für das System der ersten $m - 1$ Flächen $\frac{g_1}{t_0} + \frac{\gamma_1}{t_{m-1}} = 1$,

für die m^{te} Fläche $\frac{l_1}{t_{m-1}} + \frac{\lambda_1}{t_m} = 1$.

Behauptung: Es ist

für alle m Flächen $\frac{f_1}{t_0} + \frac{\varphi_1}{t_m} = 1$.

Beweis: Es seien P_0 und P_1 zwei conjugirte Puncte des Systems $S_1 S_{m-1}$ (Fig. 23), T_0 und T_1 zwei andere conjugirte Puncte. Ferner seien P_0 und P_2 zwei conjugirte Puncte des ganzen Systems $S_1 S_m$, T_0 und T_2 zwei andere, in der Weise, dass P_0 und T_0 unveränderlich

bleiben, so sind offenbar P_1 und P_2, T_1 und T_2 conjugirte Punctpaare bezüglich der hinzutretenden Fläche S_m. Es seien für die ersten $m - 1$ Flächen F_1 und F_{m-1} die Hauptbrennpuncte, so wie

$$T_0 P_0 = t_0, \quad T_1 P_1 = t_{m-1}, \quad T_0 F_1 = g_1, \quad T_1 F_{m-1} = \gamma_1.$$

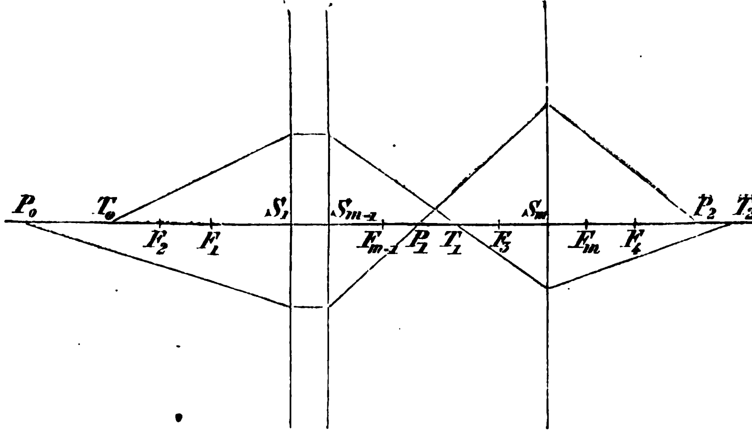


Fig. 23.

Ferner seien für die hinzutretende *mte* Fläche F_3 und F_4 die Hauptbrennpuncte, sowie

$$T_1 F_3 = l_1, \quad T_2 F_4 = \lambda_1.$$

Endlich seien für das ganze System von m Flächen F_2 und F_m die Hauptbrennpuncte, sowie

$$T_0 P_0 = t_0, \quad T_2 P_2 = t_m, \quad T_0 F_2 = f_1, \quad T_2 F_m = \varphi_1.$$

Eliminirt man t_{m-1} aus den beiden Gleichungen der Voraussetzung, so wird successive

$$\frac{g_1}{\gamma_1 t_0} + \frac{1}{t_{m-1}} = \frac{1}{\gamma_1},$$

$$\frac{1}{t_{m-1}} + \frac{\lambda_1}{l_1 t_m} = \frac{1}{l_1}.$$

Durch Subtraction dieser beiden Gleichungen von einander erhält man

$$\frac{g_1}{\gamma_1 t_0} - \frac{\lambda_1}{l_1 t_m} = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{l_1} = \frac{l_1 - \gamma_1}{\gamma_1 l_1},$$

oder

$$\frac{g_1 l_1}{(l_1 - \gamma_1) t_0} + \frac{\gamma \lambda_1}{(\gamma_1 - l_1) t_m} = 1.$$

Für $t_0 = \infty$ wird $t_m = \varphi_1 = \gamma_1 \lambda_1 : (\gamma_1 - l_1)$,

und für $t_m = \infty$ wird $t_0 = f_1 = g_1 l_1 : (l_1 - \gamma_1)$,

mithin nimmt die erhaltene Abscissengleichung die Form an

$$\frac{f_1}{t_0} + \frac{\varphi_1}{t_m} = 1,$$

Nun gilt der Satz von *einer* Fläche, also auch von zwei, drei u. s. w. allgemein von *m* Flächen.

Es kommt nun zunächst darauf an, solche conjugirte Puncte T_0 und T_1 zu erhalten, dass man für die Constanten der Abscissenformel bestimmbare Werthe erhält. Hierzu gelangen wir durch folgende Betrachtung.

Bei einer einzigen brechenden Fläche ist die Scheitelebene der geometrische Ort conjugirter Punctpaare. In ihr schneiden sich sowol die parallel mit der Axe einfahrenden Strahlen mit den gebrochenen, als die vom ersten Hauptbrennpunct einfahrenden Strahlen mit den gebrochenen parallel zur Axe ausfahrenden Strahlen. (Fig. 12). Wir nehmen nun an, dass dies zwar für die Vorderfläche eines Systemes im Allgemeinen nicht mehr gelte, dass aber irgend ein parallel mit der optischen Axe austretender Strahl $J_1 T_1$ (Fig. 24) sich mit dem in das System eintretenden Focalstrahl FA in einem Puncte H_1, ein

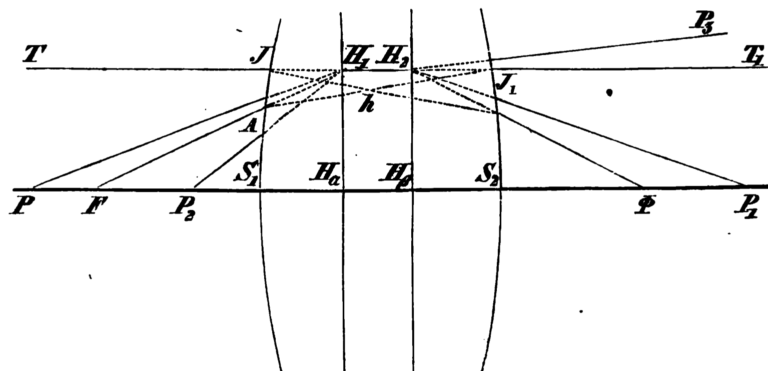


Fig. 24.

in gleicher Entfernung von der Axe mit ihr paralleler eintretender Strahl TJ sich mit dem austretenden $B\Phi$ in einem zweiten Puncte H_2 schneide. Wir können nun TJH_1 und FAH_1 als zwei in das System eintretende Strahlen eines und desselben Strahlenkegels betrachten; ebenso $H_2\Phi$ und H_2T_1 als die beiden zugehörigen aus dem Systeme austretenden Strahlen desselben. Die in derselben mit der Axe parallelen Geraden TT_1 gelegenen Puncte H_1 und H_2 sind demnach conjugirte Puncte. Die in H_1 convergirenden eintretenden Strahlen TH_1, PH_1, FH_1 und P_2H_1 werden innerhalb der brechenden Medien sich in Wirklichkeit auf andern Wegen als H_1H_2 fortpflanzen, sich aber in irgend einem Puncte h schneiden und $H_2\Phi$, H_2P_1, H_2T_1 und H_2P_3 die austretenden Strahlen sein. Dieser Kreuzungspunct h ist als ein Bildpunct des Punctes H_1 zu betrachten, nämlich nach der Brechung in den Medien, welche links von h liegen, und als conjugirter Punct des Punctes H_2 vor der Brechung in den Medien, welche rechts von h liegen, kurz h ist Bild von H_1, und H_2

Bild von h. Ist h ein reeller leuchtender Punct, so sind H_1 und H_2 gemeinschaftliche Bilder von h und umgekehrt. Man nennt den Punct h bei einem System von zwei Flächen auch wol das *optische Centrum* des Systems.

Wir denken uns jetzt durch H_1 und H_2 zwei zur Axe senkrechte Ebenen gelegt, welche dieselbe in den beiden Puncten H_α und H_β schneidet. Es lässt sich zeigen, dass jede durch diese Ebenen mit der Axe parallel gezogene Gerade dieselben in zwei conjugirten Puncten schneidet, oder mit andern Worten, dass die eine Ebene das homothetische und congruente Bild der andern ist.

Ein beliebiger Strahl PAH_1 (Fig. 25) trete nach seinen sämmtlichen Brechungen in dem System $S_1 S_4$ in der Richtung H_2DP_1 aus.

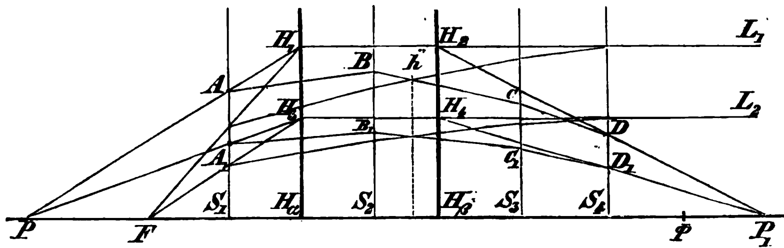


Fig. 25.

Wir construiren einen zweiten Strahl PA_1H_3, wo H_3 ein anderer Punct der Ebene H_1H_α ist. Der austretende Strahl möge $H_4D_1P_1$ sein. Nehmen wir nur vier brechende Flächen an, so ist

$$\frac{H\alpha H_1}{H\alpha H_3} = \frac{S_1A}{S_1A_1} = \frac{S_2B}{S_2B_1} = \frac{S_3C}{S_3C_1} = \frac{S_4D}{S_4D_1} = \frac{H\beta H_2}{H\beta H_4}.$$

Es schneiden sich nämlich immer je zwei Strahlen AB und A_1B_1, BC und B_1C_1, CD und C_1D_1 in einem Puncte der Axe. Da nun $H_\alpha H_1 = H_\beta H_2$ ist, so ist auch $H_\beta H_4 = H_\alpha H_3$ oder H_3H_4 parallel H_1H_2.

Geht nun P in F über, so rückt P_1 in unendliche Entfernung. Die jetzt eintretenden Strahlen sind FH_1 und FH_3, die austretenden H_2L_1 und H_4L_2. Da nun H_3 Convergenzpunct der beiden eintretenden Strahlen PH_3 und FH_3, H_4 Divergenzpunct der austretenden Strahlen H_4P_1 und H_4L_2 ist, so sind H_3 und H_4 gleichfalls conjugirte Puncte.

Es sind mithin alle homothetischen Puncte der einen Ebene $H_\beta H_2$ die Bilder der andern $H_\alpha H_1$. Die beiden Ebenen besitzen genau dieselbe Eigenschaft, welche die Scheitelebene einer einzigen brechenden Fläche in sich vereinigte. Nach Gauss werden diese beiden Ebenen mit dem Namen der *ersten* und *zweiten Hauptebene* bezeichnet und die beiden Fusspuncte derselben H_α und H_β der *erste* und *zweite Hauptpunct* genannt.

Die *Hauptebenen* sind also dadurch definirt, dass die sich im

ersten Hauptbrennpuncte F kreuzenden oder von ihm ausgehenden Strahlen mit den parallel mit der Axe aus dem Systeme austretenden Strahlen in der *ersten Hauptebene* schneiden, die parallel mit der Axe eintretenden Strahlen mit den gegen den zweiten Hauptbrennpunct Φ austretenden in der *zweiten Hauptebene.*

Der Wichtigkeit dieser beiden Ebenen wegen, wollen wir hier noch auf eine andere Art zeigen, dass z. B. alle parallel mit der Axe aus der Hinterfläche des Systems austretenden Strahlen und die in die Vorderfläche (durch den ersten Hauptbrennpunct F) eintretenden Strahlen sich bei gerader Verlängerung sämmtlich in einer festen zur Axe senkrechten Ebene schneiden. Wir werden bei dieser Betrachtungsweise zu einigen Relationen geführt, die uns später von grossem Nutzen sein werden.

Es seien wiederum $S_1 S_2 S_3 S_4$ (Fig. 26) die Scheitelpuncte eines Systems von vier Flächen, FA und FA_1 zwei beliebige Focalstrahlen, DL und $D_1 L_1$ die aus dem Systeme austretenden Strahlen. Der Durchschnittspunct von FA und DL sei H_1. Wir fällen $H_1 H_\alpha$ senkrecht gegen die Axe und verlängern DA bis zum Durchschnittspuncte U_α mit der Axe. Der erste Focalstrahl verlaufe in der viermal gebrochenen Linie $FABCDL$, der andere in $FA_1 B_1 C_1 D_1 L_1$.

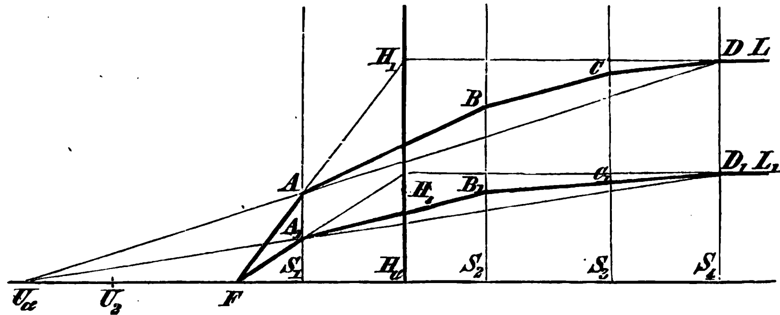


Fig. 26.

Die beiden Strahlenelemente AB und $A_1 B_1$ schneiden sich in irgend einem Puncte U_2 der Axe, BC und $B_1 C_1$ in U_3, CD und $C_1 D_1$ in U_4. Nun ist offenbar

$$\frac{S_1 A}{S_1 A_1} = \frac{S_2 B}{S_2 B_1} = \frac{S_3 C}{S_3 C_1} = \frac{S_4 D}{S_4 D_1},$$

folglich

$$S_1 A : S_1 A_1 = S_4 D : S_4 D_1 .$$

Die geraden Verbindungslinien DA und $D_1 A_1$ der Ein- und Austrittspuncte zweier von F ausgehenden Strahlen schneiden sich hiernach in einem und demselben Puncte U der optischen Axe, d. h. $U_\alpha F$ ist constant.

Nun folgt weiter aus ähnlichen Dreiecken

$$U_\alpha F : H_1 D = U_\alpha A : AD = U_\alpha S_1 : S_1 S_4 .$$

Bezeichnet man FS_1 mit f', $U_\alpha S_1$ mit f'', $S_1 H_\alpha$ mit α_1 und $S_1 S_4$ mit d und berücksichtigt, dass $H_1 D = H_\alpha S_4$ ist, so verwandelt sich obige Proportion in

$$(f'' - f') : (d - \alpha_1) = f'' : d,$$

oder

$$\alpha_1 = \frac{f' d}{f''};$$

d. h. der Abstand $S_1 H_\alpha$ ist für alle Focalstrahlen *constant*, oder die Ebene $H_1 H_\alpha$ ist fest. Bezeichnet man den Abstand US_4 mit f_2 und FH_α mit f, und beachtet, dass

$$f : f_2 = f' : f'',$$

so erhält man auch noch

$$\alpha_1 = \frac{f d}{f_2}. \qquad (15\text{a})$$

α_1 ist der Abstand des ersten Hauptpunctes vom Scheitelpuncte der Vorderfläche; α_1 wird gleich Null, wenn $f_2 = \infty$, also AD parallel mit $S_1 S_4$ ist. Dies ist immer der Fall, wenn nur eine einzige brechende Fläche vorhanden ist. Die erste Hauptebene fällt dann mit der brechenden Fläche zusammen.

Bezeichnet man nun den vorigen Benennungen entsprechend bei den parallel mit der Axe in die Vorderfläche eintretenden Strahlen $\Phi \Sigma_1$ mit φ', $U_\beta \Sigma_1$ mit φ'', $\Sigma_1 H_\beta$ mit α_2 und $S_1 S_4 = \Sigma_4 \Sigma_1$ mit d, so ergeben sich die Gleichungen

$$\alpha_2 = \frac{\varphi' d}{\varphi''} = \frac{\varphi d}{\varphi_1}. \qquad (15\text{b})$$

α_2 ist der Abstand des zweiten Hauptpunctes vom Scheitelpuncte der letzten Fläche. Man kann d eliminiren aus je zwei Gleichungen und erhält so

$$d = \frac{\alpha_1 f''}{f'} = \frac{\alpha_1 f_2}{f} = \frac{\alpha_2 \varphi''}{\varphi'} = \frac{\alpha_2 \varphi_1}{\varphi}.$$

Hierin sind f_2 und φ_1 die Abstände der Puncte U_α und U_β von der Hinter- und Vorderfläche des Systems. Die Puncte U_α und U_β sollen fortan mit dem Namen *falsche Brennpuncte* der Hinter- und Vorderfläche bezeichnet werden.

Die Abstände der Hauptbrennpuncte F und Φ von den zugehörigen Hauptpuncten sind von Gauss die *Hauptbrennweiten* des Systems genannt worden; also ist

$$H_\alpha F = f, \quad H_\beta \Phi = \varphi.$$

Von den Abscissengleichungen conjugirter Punctpaare in Bezug auf die Hauptpuncte und Hauptbrennpuncte. — Gleichungen der Ordinaten. Da im vorigen Abschnitte die Definition der Haupt- und Brennpuncte fixirt sind, so können wir ihre Lage vorläufig als gegeben betrachten, indem die Methoden ihrer Berechnung aus den Constanten § 15.

des Systems in spätern Abschnitten abgehandelt werden. Es möge zunächst ein analytischer Ausdruck für die gegenseitige Lage conjugirter Punctpaare gesucht werden.

Der Satz vom Trapez (vergl. § 6. Fig. 12). Es seien $S_1 S_2$ (Fig. 27) die Scheitelpuncte der ersten und letzten Fläche eines brechenden Systems, H_α und H_β die Hauptpuncte, F und Φ die Hauptbrennpuncte und P ein leuchtender Punct — wir suchen den Ort des Bildpunctes P_1. Verfolgen wir unter allen von P ausfahrenden Strahlen den Durchgang zweier in dem Axenschnitte PS_1S_2 gelegenen Strahlen bis zu ihrem Convergenzpunct P_1 im letzten Medium, so ist P_1 der gesuchte Punct. Wir wählen zu dem Zwecke erstlich den parallel mit der Axe in das System $S_1 S_2$ eintretenden Strahl PD. Tritt derselbe bei A aus dem System in das letzte Medium, so geht er weiter durch den zweiten Hauptbrennpunct Φ. Nach der Definition der Hauptebene schneiden sich PD und $A\Phi$ in der *zweiten* Hauptebene im Puncte H_2. Als zweiten Strahl wählen wir den Focalstrahl PFA_1; derselbe tritt bei D_1 aus der Hinterfläche aus und geht

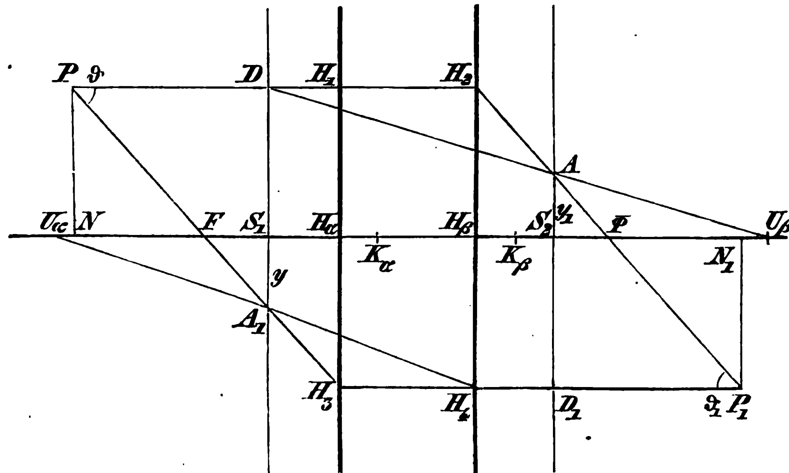


Fig. 27.

parallel mit der optischen Axe weiter. Die Strahlen PA_1 und D_1P_1 schneiden sich in ihrer Verlängerung in dem Puncte H_3 der ersten Hauptebene. Verlängern wir nun die beiden aus dem Systeme austretenden Strahlen $A\Phi$ und H_3D_1 bis zu ihrem Durchschnittspuncte P_1, so ist dies der conjugirte Punct von P.

Betrachten wir die geometrischen Verhältnisse der Figur genauer, so ist $PH_2P_1H_3$ ein Paralleltrapez. Wir construiren also auch in dem allgemeineren Falle die conjugirten Puncte durch die Methode des Trapezes der Focalstrahlen wie in § 6. Fig. 12. Dieselbe kann nun weiter dazu dienen, die Abscissengleichungen für die Puncte P und P_1 abzuleiten.

Die Ordinaten der Puncte P und P_1 seien Y_0 und Y_1. Zu Anfangspuncten der Abscissen wählt man entweder die Hauptpuncte oder die beiden Hauptbrennpuncte. Im ersten Falle ist $H_\alpha N = x_0$, $H_\beta N_1 = x_1$, im zweiten $FN = \xi_0$, $\Phi N_1 = \xi_1$. Bezeichnen wir $S_1 A_1$ mit y, $S_2 A$ mit y_1, so finden wegen ähnlicher Dreiecke folgende Proportionen Statt:

$$Y_1 : y = f : (-FS_1), \quad Y_0 : y = \xi_0 : FS_1,$$
$$Y_0 : y_1 = \varphi : (-\Phi S_2), \quad Y_1 : y_1 = \xi_1 : \Phi S_2.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$Y_0 : Y_1 = \xi_0 : (-f), \tag{7}$$

aus den beiden anderen

$$Y_0 : Y_1 = \varphi : (-\xi_1). \tag{8}$$

Demzufolge ist

$$\xi_0 \xi_1 = f\varphi$$

entsprechend der Formel (5).

Nun ist $\xi_0 = x_0 - f, \quad \xi_1 = x_1 - \varphi,$

also $(x_0 - f)(x_1 - \varphi) = f\varphi$

oder $\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1.$

entsprechend der Formel (2).

Wir sind somit bei Voraussetzung eines beliebigen Systems von brechenden Flächen zu lauter Gleichungen von derselben Form gelangt, wie bei einer einzigen brechenden Fläche, indem wir die Abscissen x_0 und x_1 statt von der Vorderfläche von den beiden Hauptpuncten abrechneten.

Nach den Vorbereitungen in § 14 lässt sich Formel (2) auch noch anders ableiten. Rechnen wir nämlich die Abscissen eines Punctpaares P_0 und P_1 von einem andern Punctpaare T_0 und T_1 ab, so ist

$$\frac{f_1}{t_0} + \frac{\varphi_1}{t_m} = 1.$$

Lassen wir die Coordinatenanfangspuncte T_0 und T_1 in die Hauptpuncte H_α und H_β übergehen, so geht $T_0 F_2$ oder f_1 (Fig. 23) durch Null hindurch in f und $T_2 F_m$ oder φ_1 durch $-\infty$ hindurch in φ über. Die Abscissen t_0 und t_m gehen dann über in x_0 und x_1 und man erhält so ebenfalls Formel (2).

Für die Ordinaten von P_0 und P_1 ergeben sich aus dem Trapeze dieselben Relationen wie in (9) und (10), nämlich

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi}{\varphi - x_1} = \frac{-\xi_0}{f} = \frac{\varphi}{-\xi_1} = \frac{x_0 - f - \varphi}{x_1 - f - \varphi}, \tag{9}$$

und

$$\frac{Y_0}{Y_1} = -\frac{\varphi x_0}{f x_1}. \tag{10}$$

Die letzte Beziehung lässt sich unmittelbar aus dem Trapeze ableiten. Die Divergenzwinkel der beiden Focalstrahlen bei P und P_1 seien ϑ und ϑ_1, so ist wegen ähnlicher Dreiecke

$$Y_1 = f \tan\vartheta = f \frac{Y_1 - Y_0}{x_0},$$

$$Y_0 = \varphi \tan\vartheta_1 = \varphi \frac{Y_0 - Y_1}{x_1},$$

woraus sich die Gleichung (10) ergibt.

Setzt man $Y_1 = Y_0$, so erhält man alle diejenigen Punct- oder Flächenpaare, von denen das eine das homothetische und congruente Bild des andern ist. Dies ist nur der Fall für $\xi_0 = -f$ und $\xi_1 = -\varphi$ oder $x_0 = x_1 = 0$, also für die beiden Hauptebenen.

Ferner wird $x_1 = x_0$ für $x_0 = x_1 = f + \varphi$. Nämlich aus

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = \frac{f}{f+\varphi} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

folgt ebenfalls $x_1 = f + \varphi$ und gemäss (9) und (10)

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{0}{0} = \frac{\varphi}{-f}.$$

Für die Bedingung $x_1 = x_0$ existirt also ausser den beiden Hauptebenen noch ein Punctpaar K_α und K_β. Die Entfernung dieser beiden Puncte von einander ist offenbar gleich der Distanz der beiden Hauptpuncte H_α und H_β, und $H_\alpha K_\alpha = H_\beta K_\beta = f + \varphi$. Demnach ist nun

$$FK_\alpha = (f + \varphi) - f = \varphi = H_\beta \Phi,$$

$$\Phi K_\beta = (f + \varphi) - \varphi = f = H_\alpha F.$$

Die Puncte K_α und K_β liegen also mit H_α und H_β symmetrisch gegen die Hauptbrennpuncte. Diese Eigenschaft hatte bei einer einzigen brechenden Fläche das Centrum.

Wählen wir K_α und K_β zu Coordinatenanfangspuncten der beiden Abscissen k_0 und k_1, so geht in der Gleichung

$$\frac{f_1}{t_0} + \frac{\varphi_1}{t_m} = 1$$

f_1 in $-\varphi$ und φ_1 in $-f$, sowie t_0 in k_0 und t_m in k_1 über. Demnach ist die Abscissengleichung in Bezug auf K_α und K_β

$$\frac{-\varphi}{k_0} + \frac{-f}{k_1} = 1$$

in Uebereinstimmung mit Formel (4).

Wir kommen in den nächsten Abschnitten auf diese wichtigen Puncte des Systems zurück und bemerken nur noch, dass die in Fig. 27 verzeichneten Puncte U_α und U_β die beiden *falschen* Brennpuncte der Hinter- und Vorderfläche des Systems sind.

Der Satz von den Ordinaten beliebiger Strahlen in den Hauptbrennpuncten. Es seien H_α und H_β (Fig. 28) die beiden Hauptpuncte eines Systems, H_1 und H_2 zwei homothetische Puncte der Hauptebene, P und P_1 zwei conjugirte Puncte, so sind sowol N und N_1, als auch L und L_1 conjugirte Punctpaare, wobei PH_1 ein einfahrender, H_2P der ausfahrende Strahl ist. Sind z und z_1 die Ordinaten dieser Strahlenelemente in den Hauptbrennpuncten F und Φ, y und y_1 die Ordinaten in den Hauptpuncten, so ist nach § 14 $y_1 = y$. Ferner ist § 16.

$$H_\alpha L = x_0, \quad H_\alpha F = f, \quad H_\beta L_1 = x_1, \quad H_\beta \Phi = \varphi .$$

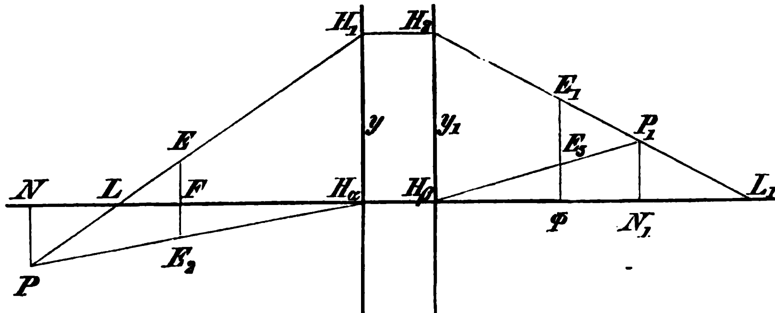


Fig. 28.

Nun ist

$$\frac{x_0 - f}{x_0} + \frac{x_1 - \varphi}{x_1} = \frac{LF}{LH_\alpha} + \frac{L_1\Phi}{L_1H_\beta} = 1 .$$

Ferner ist

$$LF : LH_\alpha = z : y ,$$
$$L_1\Phi : L_1H_\beta = z_1 : y_1 = z_1 : y ;$$

folglich

$$y = z + z_1$$

in Uebereinstimmung mit Formel (6).

Bei einer einzigen brechenden Fläche war y die Ordinate des Strahles im Scheitelpuncte. Die Scheitelebene vereinigt also alle Eigenschaften der beiden Hauptebenen in sich. Der Satz kann auch bei einem Systeme von brechenden Flächen mit Vortheil zur Construction der gebrochenen Strahlen wie der Bildpuncte von Objecten angewendet werden, wenn die vier Puncte F, H_α, H_β und Φ gegeben sind.

Von den Möbius'schen Knotenpuncten und den vier Töpler'schen Fundamentalpuncten. — Construction der Bilder von Objecten. Ist in der Gleichung der Ordinaten in den Brennpuncten $y = 0$, so ist $z_1 = -z$. Wenn ausserdem $f = -\varphi$ ist, so sind offenbar die beiden Strahlen PH_α und $H_\beta P_1$ einander parallel und $Y_0 : Y_1 = x_0 : x_1$, wie sich sowol aus Fig. 28, als auch aus der Relation § 17.

$$Y_0 : Y_1 = -\varphi x_0 : f x_1$$

ergibt.

Sind demnach die beiden Hauptbrennweiten eines Systemes einander gleich, so haben die conjugirten Lichtstrahlen PH_α und $H_\beta P_1$ gleiche Winkelabstände von der Axe. Es kann in diesem speciellen Falle, welcher häufig eintritt, diese Eigenschaft zur Construction der gebrochenen Strahlen wie der Bildpuncte von Objecten benutzt werden.

Sind dagegen f und $-\varphi$ von einander verschieden, so sind PH_α und $H_\beta P_1$ einander nicht mehr parallel, in diesem Falle sind es aber immer die Linien PK_α und $K_\beta P_1$, wo K_α und K_β die im vorigen Abschnitte erwähnten Puncte sind. Sie heissen nach Möbius Bezeichnung die *Knotenpuncte**) (points nodaux) des Systems. Die Punctpaare H_α und K_β (Fig. 27, 29 u. 30), K_α und H_β liegen symmetrisch gegen die Brennpuncte F und Φ; dabei ist

$$k_0 = x_0 - f - \varphi, \quad k_1 = x_1 - f - \varphi.$$

Da nun

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{x_0 - f - \varphi}{x_1 - f - \varphi}$$

ist, so ist auch noch

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{k_0}{k_1}.$$

Hieraus folgt, dass PK_α parallel mit $K_\beta P_1$ ist. Die characteristische Eigenschaft der Knotenpuncte ist demnach die, dass ein in der Richtung des ersten Knotenpunctes K_α einfahrender Strahl innerhalb des Systems immer so gebrochen wird, dass der ausfahrende Strahl parallel mit dem einfahrenden verläuft (Puncte des gleichen Durchganges). Wir haben im 15. Abschnitte die Lage der Knotenpuncte aus der Bedingung $x_1 = x_0$ hergeleitet. Man kann dieselbe auch deduciren aus der Bedingung „PK_α parallel mit $K_\beta P_1$“.

Es seien K_α und K_β zwei solche Puncte der Axe, welche die gestellte Bedingung erfüllen und $FK_\alpha = f_1$, $\Phi K_\beta = \varphi_1$, so ist mit Berücksichtigung der Gleichungen (7) und (8):

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f_1 - \xi_0}{\varphi_1 - \xi_1} = \frac{\xi_0}{-f},$$

$$-ff_1 + f\xi_0 = \varphi_1\xi_0 - \xi_0\xi_1 = \varphi_1\xi_0 - f\varphi,$$

folglich

$$f(\varphi - f_1) = \xi_0(\varphi_1 - f).$$

Ebenso ist

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f_1 - \xi_0}{\varphi_1 - \xi_1} = \frac{\varphi}{-\xi_1},$$

$$-f_1\xi_1 + \xi_0\xi_1 = -f_1\xi_1 + f\varphi = \varphi\varphi_1 - \varphi\xi_1,$$

folglich

$$\varphi(\varphi_1 - f) = \xi_1(\varphi - f_1).$$

---

*) Möbius, Crelle Journ. 1830 Bd. 5. pag. 113. Listing, Art. Dioptrik in Wagners Handwörterbuch der Physiologie IV. 1851. pag. 464.

Da nun ξ_0 und ξ_1 variabele Grössen sind, so gibt jede dieser beiden Gleichungen

$$f_1 = \varphi, \quad \varphi_1 = f.$$

Die Abscissengleichung conjugirter Puncte bezüglich K_α und K_β findet man folgendermassen: Es ist

$$\frac{k_0}{k_1} = \frac{Y_0}{Y_1} = \frac{-\varphi x_0}{f x_1} = \frac{-\varphi(k_0 + f + \varphi)}{f(k_1 + f + \varphi)}$$

also

$$\frac{k_1}{k_1} = \frac{-\varphi(k_0 + f + \varphi)}{f(k_1 + f + \varphi)}.$$

Bildet man die Productengleichung, dividirt durch $f + \varphi$, so erhält man wieder die Gleichung (4), nämlich

$$\frac{(-\varphi)}{k_0} + \frac{(-f)}{k_1} = 1.$$

Hieraus folgt noch als Zusatz zu (9)

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{k_0}{k_1} = \frac{\varphi + k_0}{-f} = \frac{-\varphi}{f + k_1} = \frac{-\varphi(k_0 + f + \varphi)}{f(k_1 + f + \varphi)}. \qquad (16)$$

Von den bisher betrachteten *festen* oder *Cardinal-Puncten* eines Systems brechender Flächen sind H_α und H_β die Puncte *gleicher* und *homothetischer* Object- und Bildgrössen, K_α und K_β die Puncte des *gleichen Strahlendurchganges*. Es gibt ausserdem nun noch zwei entsprechende Punctepaare G_α und G_β, L_α und L_β, von denen das erste Paar die Puncte *gleicher* und *antithetischer* Object- und Bildgrössen, das zweite Paar die Puncte des *symmetrischen Durchganges* sind. Das erste Paar nennt Töpler*) die *negativen Hauptpuncte*, das zweite die *negativen Knotenpuncte*. Was die Cardinalpuncte G_α und G_β anbelangt, so sind zufolge der Gleichung (9)

$$Y_0 : Y_1 = (f - x_0) : f = \varphi : (\varphi - x_1)$$

ihre Abstände von den Hauptpuncten resp. gleich $2f$ und 2φ und wegen der Beziehungen

$$x_0 = 2f + g_0, \quad x_1 = 2\varphi + g_1$$

die Abscissengleichung conjugirter Puncte bezüglich dieser Coordinatenanfangspuncte G_α und G_β

$$\frac{(-f)}{g_0} + \frac{(-\varphi)}{g_1} = 1$$

entsprechend der Formel (26). Die Ordinatengleichung ist alsdann

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f + g_0}{-f} = \frac{-\varphi}{\varphi + g_1} = \frac{g_0 + f - \varphi}{g_1 - f + \varphi} = \frac{\varphi g_0}{f g_1}$$

entsprechend Formel (9b) in § 7.

---

*) Pogg. Ann. Bd. 142. S. 244.

Was endlich die Puncte L_α und L_β anbetrifft, so sind zufolge der Bestimmung $x_1 = -x_0$ ihre Abstände von den Hauptpuncten resp. gleich $f - \varphi$ und $\varphi - f$ und wegen der Beziehungen

$$x_0 = l_0 + f - \varphi, \quad x_1 = l_1 - f + \varphi,$$

die Abscissengleichung conjugirter Puncte bezüglich dieser Coordinatenanfangspuncte L_α und L_β

$$\frac{\varphi}{l_0} + \frac{f}{l_1} = 1$$

entsprechend der Formel (3b). Die Ordinatengleichung ist alsdann

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{\varphi - l_0}{f} = \frac{\varphi}{f - l_1} = \frac{-l_0}{l_1}$$

entsprechend der Formel (9c) in § 7.

Stellen wir sämmtliche Formeln für die Ordinaten conjugirter Puncte zusammen, so sind es diese:

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi}{\varphi - x_1} = \frac{x_0 - f - \varphi}{x_1 - f - \varphi} = -\frac{\varphi x_0}{f x_1},$$

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f + g_0}{-f} = \frac{-\varphi}{\varphi + g_1} = \frac{g_0 + f - \varphi}{g_1 - f + \varphi} = \frac{\varphi g_0}{f g_1},$$

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{\varphi + k_0}{-f} = \frac{-\varphi}{f + k_1} = \frac{k_0}{k_1} = -\frac{\varphi(k_0 + f + \varphi)}{f(k_1 + f + \varphi)},$$

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{\varphi - l_0}{f} = \frac{\varphi}{f - l_1} = \frac{-l_0}{l_1} = -\frac{\varphi(l_0 + f - \varphi)}{f(l_1 - f + \varphi)},$$

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{\xi_0}{-f} = \frac{-\varphi}{\xi_1} = \frac{\xi_0 - \varphi}{\xi_1 - f} = -\frac{\varphi(\xi_0 + f)}{f(\xi_1 + \varphi)} = \sqrt{\frac{\xi_0 \varphi}{\xi_1 f}}.$$

Die bis hieher gefundenen Eigenschaften dioptrischer Systeme können nun in mannigfacher Weise benutzt werden, zu einem in die Vorderfläche eintretenden Lichtstrahle den aus der Hinterfläche austretenden gebrochenen Strahl, sowie zu einem leuchtenden Puncte (Object) den zugehörigen Brennpunct (Bild) zu construiren.

Erste Methode. (Methode des Trapezes.) Ist P (Fig. 29) der leuchtende Punct, so reichen immer zwei Strahlen hin, um die Lage von P_1 zu finden. Gegeben seien die beiden Hauptbrennpuncte und die beiden Hauptpuncte. Man ziehe PH_2 parallel zur Axe und den Focalstrahl $H_2\Phi$; ferner ziehe den Focalstrahl PH_3 und H_3D_1 parallel mit der Axe bis zum Durchschnittspuncte P_1 mit $H_2\Phi$. Dann ist P_1 der Bildpunct von P.

Um zu einem einfallenden Strahl PH_5 den austretenden zu construiren, ziehe man H_5H_6 parallel mit der Axe und verbinde H_6 mit P_1, so ist dies das austretende Strahlenelement.

Zweite Methode. (Methode der Ordinaten in den Brennpuncten.) Um zu einem einfahrenden PH_1 (Fig. 28) den aus dem Systeme ausfahrenden Strahl zu construiren, ziehe man H_1H_2 parallel zur Axe,

mache ΦE_1 oder z_1 gleich $y - z = H_\alpha H_1 - FE$ und ziehe $H_2 E_1$; so ist dies der gesuchte Strahl.

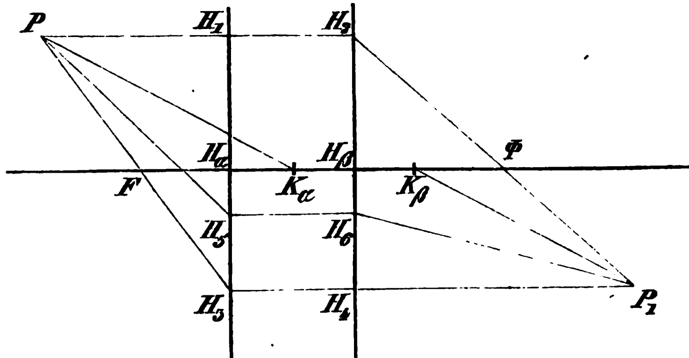


Fig. 29.

In diesem Strahle liegt aber auch der Bildpunct P_1 des leuchtenden Punsctе P. Um denselben zu construiren, ziehe man einen zweiten Strahl PH_α, mache ΦE_3 gleich FE_2 und verlängere $H_\beta E_3$ bis zum Durchschnittspuncte P_1 mit $H_2 L_1$.

Dritte Methode. (Methode der Knotenpuncte.) Gegeben seien die Brennpuncte und die Hauptpuncte; die Knotenpuncte sind dann ebenfalls gegeben. Ist P (Fig. 30) der leuchtende Punct, so verbinde man P mit K_α und ziehe $K_\beta M$ parallel mit PK_α. Ferner

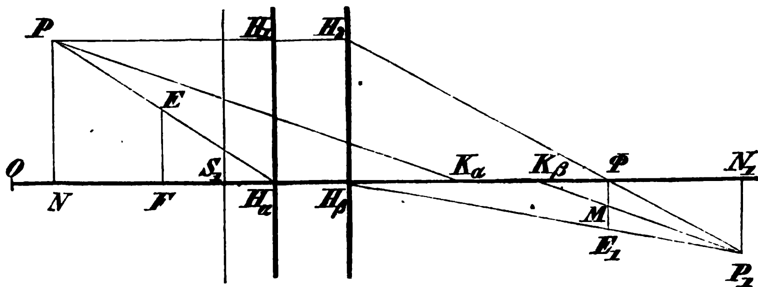


Fig. 30.

verbinde man P mit H_α, mache $\Phi E_1 = FE$ und ziehe $H_\beta E_1$ bis zum Durchschnittspuncte P_1 mit $K_\beta M$.

Vierte Methode. (Methode der Haupt- und Knotenpuncte.) Gegeben seien die beiden Haupt- und Knotenpuncte. Man ziehe PH_1 (Fig. 30) parallel zur Axe und den Focalstrahl $H_2 \Phi$.

Fünfte Methode. (Methode der Abscissen ξ_0 und ξ_1.) Der Punct P liege zunächst in der Axe. Man nehme H_1 (Fig. 31) in der ersten Hauptebene beliebig, ferner $H_1 E_2$ parallel und gleich $H_\beta \Phi = \varphi$, ziehe $H_1 P$ und $E_2 F$ bis zum Durchschnittspuncte U, sowie UH_α

bis zum Durchschnittspuncte U_1 mit $H_1 E_2$. Alsdann mache man $E_1 U_2 = E_2 U_1$ und fälle $U_2 P_1$ senkrecht zur optischen Axe. P_1 ist der Bildpunct von P.

Der Beweis ergibt sich folgendermassen:

$$\xi_0 : \varphi = f : E_2 U_1 = f : E_1 U_2 = f : \xi_1,$$

Fig. 31.

woraus sich ergibt $\xi_0 \xi_1 = f\varphi$.

Der Punct P liege ausserhalb der Axe. Man construire seine Ordinate PN und suche zu N den Punct N_1 in der vorgeschriebenen Weise. Der Punct P_1 liegt in der Ordinate des Punctes N_1. Um ihn zu erhalten, ziehe man die Knotenpunctsstrahlen PK_α und $K_\beta P_1$.

Sechste Methode. (Methode der Brennebene.)*) Es sei LH_1 (Fig. 32) die Richtung des eintretenden Lichtstrahles, man soll die Bahn des austretenden Strahlelementes $H_2 L_1$ finden. Die Lösung

Fig.32 .

stützt sich auf das in § 8 beschriebene Verhalten des von einer der Brennebenen aus in das System eintretenden Strahlen, welche nach der Brechung nach einer bestimmten Richtung parallel mit einander austreten. Der Strahl NH_1 treffe die erste Brennebene in E. Der weitere Verlauf des Strahles von E aus ist nun offenbar ganz

*) Helmholtz, physiol. Optik § 9.

derselbe, ob der leuchtende Punct in N oder in E liegt. Er liege in E und sende ausser dem ersten noch den Strahl EK_α gegen den ersten Knotenpunct aus. Derselbe tritt in der Richtung $K_\beta T$ aus dem Systeme aus, parallel mit EK_α. Es muss nun $H_2 N_1$ parallel zu $K_\beta T$ bleiben, weil der Bildpunct von E unendlich weit entfernt ist. Hieraus ergibt sich leicht die Construction, wie folgt. Man ziehe NH_1 beliebig und $H_1 H_2$ parallel zur Axe. Ferner verbinde man E mit K_α und ziehe $H_2 N_1$ parallel mit EK_α.

Ist $E_1 \Phi$ die Ordinate dieses Strahles im Brennpuncte Φ, so ist $K_\beta E_1$ auch parallel zu EH_1. Denn dieses würde sich offenbar ergeben, wenn man zu einem von rechts in das System eintretenden Strahle $N_1 H_2$ den vorne austretenden $H_1 N$ construiren wollte. Man kann deshalb auch so verfahren, dass man $K_\beta E_1$ parallel zu NH_1 zieht und H_2 mit E_1 verbindet.

Will man zu einem leuchtenden Puncte P den Bildpunct construiren, so ziehe man ausser den vorerwähnten Linien noch PK_α und $K_\beta P_1$ parallel mit einander; P_1 wird der gesuchte Punct sein.

Siebente Methode. (Methode des symmetrischen Durchganges.) Es seien L und L_1 (Fig. 33) irgend zwei conjugirte Puncte, die man leicht findet, wenn man z. B. $H_\alpha L$ und $H_\beta L_1$ gleich $-f+\varphi$ macht. (Puncte des symmetrischen Durchganges.) Setzt man nämlich in die Gleichung

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

$x_1 = -f + \varphi$ ein, so wird $x_0 = f - \varphi$.

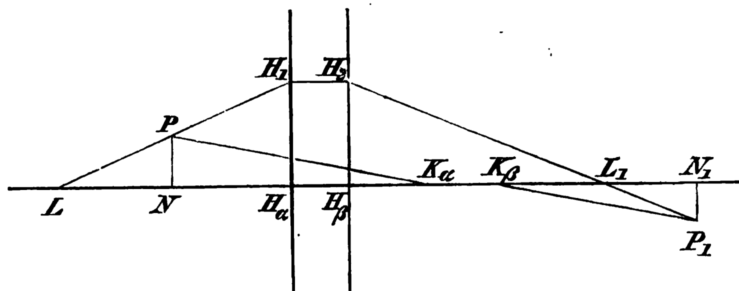


Fig. 33.

P sei der leuchtende Punct und man sucht sein Bild P_1. Man ziehe LPH_1, $H_1 H_2$ parallel mit $H_\alpha H_\beta$ und $H_2 L_1$ beliebig weit. Endlich ziehe man noch PK_α und $K_\beta P_1$ parallel, so ist P_1 der verlangte Punct.

Von der Krümmung der Bildflächen bei der Brechung der Lichtstrahlen durch ein System von Flächen. In § 9 ist bereits gezeigt worden, welche Beziehung zwischen der Krümmung der § 18.

Objecte und ihren Bildern stattfindet, wenn die Objecte verhältnissmässig klein sind und die Krümmungsmittelpuncte ihrer Flächen in der optischen Axe liegen. Die Krümmung der Bilder, welche in den dioptrischen Instrumenten, namentlich bei photographischen Aufnahmen mittels der Camera obscura störend ist, kann gehoben werden, wenn zu einer brechenden Fläche mehrere andere centrirte durch verschiedene Medien getrennte Kugelflächen hinzutreten. Dies kann bei der Camera obscura z. B. erreicht werden durch Anwendung von zwei Linsen verschiedener Glassorten. Da in jedem Bildpuncte sich die Lichtstrahlen durchkreuzen und so einen neuen leuchtenden Punct erzeugen, der seine Strahlen wieder gegen die zweite Fläche aussendet u. s. f., so werden die Krümmungen der aufeinander folgenden Bilder sich durch ebensoviele Gleichungen ausdrücken lassen und zwar nach (12) bei m Flächen

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1}{\varrho_1} + \frac{f_1}{\varrho_2} &= 1, \\ \frac{\varphi_2}{\varrho_2} + \frac{f_2}{\varrho_3} &= 1, \\ \vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ \frac{\varphi_m}{\varrho_m} + \frac{f_m}{\varrho_{m+1}} &= 1. \end{aligned}$$

Eliminirt man alle Krümmungsradien mit Ausnahme des ersten, des Objects, und des letzten, des Hauptbildes, so erhält man

$$\frac{1}{\varrho_1} \pm \frac{f_1 f_2 f_3 \ldots f_m}{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_m} \frac{1}{\varrho_{m+1}} = \frac{1}{\varphi_1}\left[1 - \frac{f_1}{\varphi_2} + \frac{f_1 f_2}{\varphi_2 \varphi_3} - \ldots\right]. \quad (17)$$

Hieraus kann zu einem gegebenen Werthe von ϱ_1 der zugehörige ϱ_{m+1} berechnet werden und umgekehrt. In der Camera obscura ist $\varrho_{m+1} = \infty$ und ist das Object eine zur optischen Axe senkrechte Ebene, so ist auch $\varrho_1 = \infty$. Hierfür gilt also die Bedingungsgleichung

$$1 - \frac{f_1}{\varphi_2} + \frac{f_1 f_2}{\varphi_2 \varphi_3} - \frac{f_1 f_2 f_3}{\varphi_2 \varphi_3 \varphi_4} + \ldots = 0.$$

Da die Zahl der willkürlichen Grössen mit der Anzahl der Flächen rasch zunimmt, so ist der Möglichkeit ebene Bilder zu erzeugen, eine weite Grenze gesteckt.

Bei einer einzigen brechenden Fläche können offenbar ϱ_1 und ϱ_2 nur gleich ∞ werden, wenn $r = \infty$, die Fläche also selbst eine Ebene ist. Bei zweien werden ϱ_1 und ϱ_3 gleich ∞, wenn

$$1 - \frac{f_1}{\varphi_2} = 0, \text{ also } \varphi_2 = f_1$$

ist. Wenn der relative Brechungsindex des Mediums M_1 gegen den des Mediums M_0 gleich n_1, der des Mediums M_2 gegen den des

Mediums M_1 gleich n_2 und die Krümmungsradien der beiden Flächen resp. r_1 und r_2 sind, so müsste sein:

$$\frac{r_1}{n_1 - 1} = - \frac{n_2 r_2}{n_2 - 1}.$$

Ist das Medium M_2 von derselben optischen Dichtigkeit wie das Medium M_0, so ist $n_2 = 1 : n_1$ und folglich $r_2 = r_1$.

Für *drei* brechende Flächen und $n_3 = 1 : n_1$ muss sein

$$r_2 r_3 n_2 (n_1 - 1) + r_1 r_3 (n_2 - 1) - r_1 r_2 (n_1 - 1) = 0$$

oder

$$\frac{n_2 (n_1 - 1)}{r_1} + \frac{n_2 - 1}{r_2} - \frac{n_1 - 1}{r_3} = 0.$$

Die Gleichung wird eine bestimmte, wenn noch eine andere Bedingung hinzutritt, z. B. die, dass das System ein achromatisches sein soll.

Ueber das Verhältniss der Ordinaten eines Strahles in verschiedenen homogenen Puncten der Axe. Für manche Rechnungen ist es wünschenswerth, für einen beliebigen Strahl das Verhältniss seiner Ordinaten in gewissen homologen Puncten der optischen Axe zu kennen, insbesondere in folgenden Fällen: § 19.

1) wenn der Strahl durch die beiden Hauptpuncte geht,
   a) die Ordinaten in den Hauptbrennpuncten;
   b) die Ordinaten in den Scheitelpuncten der Vorder- und Hinterfläche des Systems;
   c) die Ordinaten in den Puncten des symmetrischen Durchgangs;
2) wenn der Strahl durch die beiden Knotenpuncte geht,
   a) die Ordinaten in den Hauptbrennpuncten;
   b) die Ordinaten in den beiden Scheitelpuncten;
3) wenn der Strahl durch einen der Hauptbrennpuncte geht,
   a) die Ordinaten in den Scheitelpuncten;
4) wenn der Strahl durch die Puncte des symmetrischen Durchganges geht,
   a) die Ordinaten in den Hauptbrennpuncten,
   b) die Ordinaten in den Scheitelpuncten der Vorder- und Hinterfläche.

Die *Puncte des symmetrischen Durchganges* sind die beiden conjugirten Puncte, für welche $x_1 = - x_0$ ist. Aus der Formel (2) ergibt sich die Entfernung derselben von den Hauptpuncten, nämlich

$$H_\alpha L_\alpha = f - \varphi, \quad H_\beta L_\beta = -(f - \varphi).$$

Die Abstände der Scheitelpuncte von diesen Puncten L_α und L_β wollen wir mit γ_1 und γ_2 bezeichnen (Fig. 33).

Die *Knotenpuncte* sind die Puncte des *gleichen Durchganges* und es ist $x_1 = x_0$. Die Entfernung derselben von den Hauptpuncten ist

$$H_\alpha K_\alpha = H_\beta K_\beta = f + \varphi.$$

Bezeichnen wir die Abstände der Scheitelpuncte von den Hauptpuncten mit α_1 und α_2, setzen also

$$H_\alpha S_1 = \alpha_1 \text{ (negativ)}, \; H_\beta S_2 = \alpha_2 \text{ (positiv)},$$

ferner die Abstände der Scheitelpuncte von den Knotenpuncten mit β_1 und β_2, so ist

$$K_\alpha S_1 = \beta_1 = \alpha_1 - f - \varphi \text{ (negativ)},$$
$$K_\beta S_2 = \beta_2 = \alpha_2 - f - \varphi \text{ (positiv)}.$$

Ausserdem ist noch

$$L_\alpha S_1 = \gamma_1 = \alpha_1 - f + \varphi \text{ (positiv)},$$
$$L_\beta S_2 = \gamma_2 = - \alpha_2 - f + \varphi \text{ (negativ)}.$$

Rechnet man diese sechs Puncte $H_\alpha H_\beta$, $K_\alpha K_\beta$, $L_\alpha L_\beta$ von den festen Puncten $S_1 S_2$ ab, so kehrt sich das Vorzeichen ihrer Richtungen um.

Wir betrachten die genannten speciellen Fälle:

1) a) Ist die Ordinate $H_\alpha H_1 = H_\beta H_2$ gleich Null, so sind die Ordinaten z_0 und z_1 in den Hauptbrennpuncten gleich gross mit entgegengesetzten Vorzeichen; also nach § 16:

$$z_0 : z_1 = - 1.$$

b) Ist y_1 die Ordinate eines Punctes P der ersten Scheitelebene, y_m' die seines Bildes P_1, so ist

$$y_1 : y_m' = - \varphi x_0 : f x_1 = - \varphi \alpha_1 : f x_1.$$

Ist ferner y_m die Ordinate des von P durch die Hauptpuncte gehenden Strahles in der letzten Scheitelebene, so ist

$$y_m' : y_m = x_1 : \alpha_2,$$

folglich

$$y_1 : y_m = - \varphi \alpha_1 : f \alpha_2.$$

c) Sind η_1 und η_m die Ordinaten eines gegen die Hauptpuncte gerichteten Strahles in den Puncten des symmetrischen Durchganges, so ist

$$\eta_1 : \eta_m = \varphi : f.$$

2) a) Sind z_1 und z_m die Ordinaten eines gegen die Knotenpuncte gerichteten Strahles in den Hauptbrennpuncten, so ist

$$z_1 : z_m = \varphi : f.$$

b) Gemäss den oben angenommenen Bezeichnungen findet man

$$y_1 : y_m = \beta_1 : \beta_2 = (\alpha_1 - f - \varphi) : (\alpha_2 - f - \varphi).$$

3) a) Geht ein Strahl durch den *ersten* Hauptbrennpunct, so ist

$$y_1 : y_m = (f - \alpha_1) : f;$$

geht derselbe durch den *zweiten* Hauptbrennpunct, so ist

$$y_1 : y_m = \varphi : (\varphi - \alpha_2).$$

4) a) Geht ein Lichtstrahl durch die Puncte des symmetrischen Durchganges und ist y die Ordinate desselben in den Hauptpuncten, so ist

$$z : y = \varphi : (\varphi - f)$$
$$z_1 : y = f : (f - \varphi),$$

folglich $$z : z_1 = - \varphi : f.$$

b) Man findet leicht die Proportionen

$$y_1 : y_m = \gamma_1 : (-\gamma_2) = (\alpha_1 - f + \varphi) : (\alpha_2 + f - \varphi).$$

Von der Beziehung zwischen den Hauptbrennweiten f und φ eines beliebigen Systems centrirter brechender Kugelflächen. § 20.
Theorem: In jedem Systeme centrirter brechender Kugelflächen ist

$$(-f) : \varphi = v_m : v_0 = N_0 : N_m$$

oder $$-fv_0 = \varphi v_m$$

wenn v_0 und v_m die Geschwindigkeiten des Lichtes in den Medien M_0 und M_m vor und hinter dem Systeme, sowie N_0 und N_m die absoluten Berechnungsindices dieser Medien bezeichnen.

Wir wollen für dies wichtige Theorem mehrere Beweise führen:

Erster Beweis (Helmholtz, Physiol. Opt. § 9). Es sei gegeben ein System von m brechenden Flächen $S_1 S_2 \ldots S_m$ (Fig. 34), die Hauptpuncte seien wiederum H_α und H_β, P_0 und P_1 zwei conjugirte Puncte. Es sei ferner Y_0 die Grösse eines senkrechten Objectes in der ersten Hauptebene, Y_1 das Bild davon nach der Brechung in der

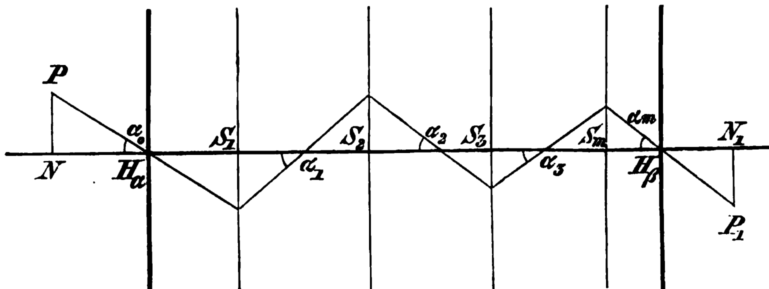


Fig. 34.

Fläche S_1, Y_2 das zweite Bild hinter S_2 u. s. f., Y_m das Bild hinter S_m. Dieses letztere Bild liegt in der zweiten Hauptebene und es ist $Y_m = Y_0$. Bezeichnen wir ebenso wie in § 11 (Fig. 21) den Winkel,

welchen der einfallende Strahl PH_α mit der Axe bildet, mit α_0, den Winkel nach der Brechung in der ersten Fläche S_1 mit α_1 u. s. f., endlich den Winkel, welchen der durch H_β austretende Strahl $H_\beta P_1$ mit der Axe bildet, mit α_m, so ist gemäss dem Theorem (14) für relative Brechungsindices $n_1 n_2 \dots n_m$ der Medien $M_1 M_2 \dots M_m$

$$\begin{aligned} Y_0 \tan \alpha_0 &= n_1 Y_1 \tan \alpha_1, \\ Y_1 \tan \alpha_1 &= n_2 Y_2 \tan \alpha_2, \\ &\vdots \\ Y_{m-1} \tan \alpha_{m-1} &= n_m Y_m \tan \alpha_m. \end{aligned}$$

Multiplicirt man sämmtliche Gleichungen mit einander, so erhält man

$$Y_0 \tan \alpha_0 = n_1 n_2 \dots n_m Y_m \tan \alpha_m.$$

Weil nun $Y_m = Y_0$ ist, so verwandelt sich die Gleichung in die Proportion

$$\tan \alpha_0 : \tan \alpha_m = n_1 n_2 \dots n_m.$$

Bezeichnen wir weiter die Ordinaten PN und $P_1 N_1$ mit Y_0' und Y_m', die Abscissen NH_α und $N_1 H_\beta$ mit x_0 und x_1, so ist nach dem Früheren

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1, \quad x_1 = \frac{\varphi x_0}{x_0 - f}.$$

Ferner folgt aus Fig. 34

$$Y_0' = x_0 \tan \alpha_0, \quad Y_m' = x_1 \tan \alpha_m,$$

also $$\tan \alpha_0 : \tan \alpha_m = n_1 n_2 \dots n_m = Y_0' x_1 : Y_m' x_0.$$

Eliminirt man x_1, so wird

$$\frac{Y_0'}{Y_m'} \cdot \frac{\varphi}{x_0 - f} = n_1 n_2 \dots n_m.$$

Es ist aber auch

$$\frac{Y_0'}{Y_m'} = \frac{f - x_0}{f},$$

folglich ist

$$\varphi : (-f) = n_1 n_2 \dots n_m.$$

Bezeichnen nun $v_0 v_1 v_2 \dots v_m$ die Lichtgeschwindigkeiten in den auf einander folgenden Medien $M_0 M_1 M_2 \dots M_m$, so ist

$$n_1 = \frac{v_0}{v_1}, \quad n_2 = \frac{v_1}{v_2}, \quad \dots\dots \; n_m = \frac{v_{m-1}}{v_m},$$

also $$n_1 n_2 \dots n_m = v_0 : v_m = N_m : N_0.$$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit der obigen Gleichung

$$(-f) : \varphi = v_m : v_0 = N_0 : N_m$$

oder $$-f v_0 = \varphi v_m. \qquad (18)$$

Dies Theorem lässt sich in Worten ausdrücken: *Die beiden Hauptbrennweiten eines Systems verhalten sich zu einander wie die*

optischen Dichtigkeiten der vor und hinter demselben befindlichen Medien.

Bemerkung: In dem vorstehenden von Helmholtz gegebenen Beweise sind zwei Objecte Y_0 und Y_0' eingeführt. Dieselben lassen zur Vereinfachung des Beweises sich auf eines reduciren. Es liege das Object Y_0 ausserhalb der Hauptebene, so ergibt sich ebenfalls die Endgleichung

$$\frac{Y_0 \tan \alpha_0}{v_0} = \frac{Y_m \tan \alpha_m}{v_m}.$$

Sind x_0 und x_1 die Abscissen von Y_0 und Y_m, so ist

$$\frac{Y_0 \tan \alpha_0}{Y_m \tan \alpha_m} = \frac{\varphi x_0 \tan \alpha_0}{-f x_1 \tan \alpha_m} = \frac{\varphi Y_0}{-f Y_m}.$$

Gehen die Objecte in die Hauptebenen über, so wird $Y_m = Y_0$ und wie zuvor

$$-f v_0 = \varphi v_m.$$

Hierbei ist offenbar $\text{Lim}\left(\frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha_m}\right) = \frac{\varphi}{-f}$.

Zweiter Beweis: Sind wiederum Y_0 und Y_m die Ordinaten irgend eines leuchtenden Punctes vor dem System und seines Bildes hinter demselben, so ist wie vorhin

$$\frac{Y_0 \tan \alpha_0}{v_0} = \frac{Y_m \tan \alpha_m}{v_m}.$$

Beziehen wir wiederum die Abscissen der conjugirten Puncte auf die Hauptpuncte, so ist

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1, \quad \frac{Y_0}{Y_m} = \frac{-\varphi x_0}{f x_1}.$$

Es gibt nun einen Fall, in welchem $x_1 = x_0$ und einen zweiten,

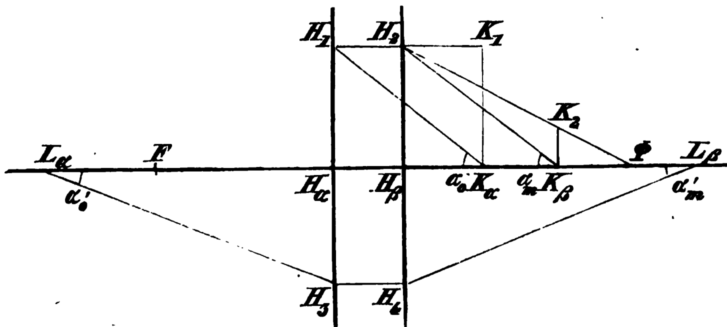


Fig. 35.

in welchem $x_1 = -x_0$ wird. Im ersten Falle ist $x_0 = f + \varphi$, d. h. der leuchtende Punct (Object) liegt in der ersten Knotenebene. Die Ordinate sei $K_\alpha K_1$ und $K_\alpha H_1$ der erste Strahl, $H_2 K_\beta$ der letzte. Zugleich ist $\alpha_m = \alpha_0$. Setzen wir nun in die Coordinatengleichungen

die Werthe $\alpha_m = \alpha_0$ und $x_1 = x_0$ ein, so erhalten wir

$$\frac{Y_0}{v_0} = \frac{Y_m}{v_m}, \quad \frac{Y_0}{Y_m} = \frac{\varphi}{-f},$$

also ebenfalls die Gleichung (18).

Ist $x_1 = - x_0$, so ist $x_0 = f - \varphi$, $x_1 = -(f - \varphi)$. Diese conjugirten Puncte seien L_α und L_β (Fig. 35); sie sind die Puncte des symmetrischen Durchganges. Ferner sei $L_\alpha H_3$ der eintretende, $H_4 L_\beta$ der aus dem System austretende Strahl. Dann ist offenbar $\alpha_m' = - \alpha_0'$ und wenn wir dies nebst der Gleichung $x_1 = - x_0$ in die Coordinatengleichungen einsetzen, so erhält man schliesslich auch die Gleichung (18).

Dritter Beweis: Es seien wiederum P_0 und P_1 (Fig. 36) zwei conjugirte Puncte und ihre Ordinaten $P_0 N = Y_0$, $P_1 N_1 = Y_m$. $N H_3$ sei der unter dem Winkel α_0 eintretende, $H_4 N_1$ der unter dem Winkel α_m austretende Strahl, so ist wie früher

$$\frac{Y_0 \tan \alpha_0}{v_0} = \frac{Y_m \tan \alpha_m}{v_m}.$$

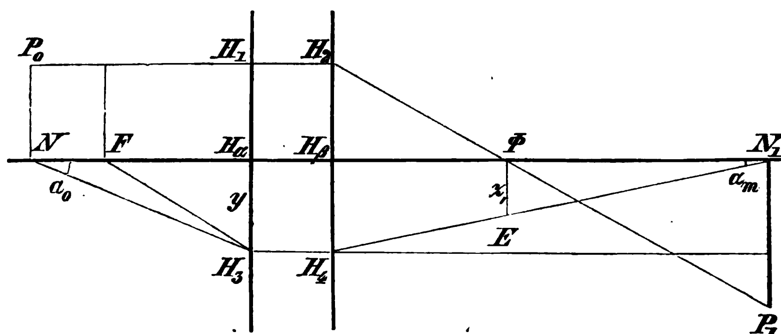


Fig. 36.

Ist $FN = \xi_0$, $\Phi N_1 = \xi_1$, so ist nach (8)

$$Y_0 : Y_m = - \varphi : \xi_1,$$

mithin
$$- v_m \varphi \tan \alpha_0 = v_0 \xi_1 \tan \alpha_m = v_0 z_1.$$

Geht nun N in F über, d. h. liegt der leuchtende Punct in der ersten Focalebene, so wird

$$z_1 = \Phi E = H_\beta H_4 = H_\alpha H_3 = Y = f \tan \alpha_0.$$

Demnach geht die Gleichung

$$- v_m \varphi \tan \alpha_0 = v_0 z_1$$

über in
$$- v_m \varphi \tan \alpha_0 = v_0 f \tan \alpha_0$$

oder
$$- f v_0 = \varphi v_m.$$

Vierter Beweis: Es sei Y_0 die Ordinate eines leuchtenden Punctes der ersten Hauptebene, y_1 die Ordinate eines leuchtenden Punctes

P der Vorderfläche des Systems. Von dem Puncte P (Fig. 37) sei der Strahl PH_α gegen den ersten Hauptpunct gerichtet und seine Bahn $PJ_2 J_3 \ldots J_m P_1$. Alsdann ist $y_m' = P_1 N_1$ die Ordinate des

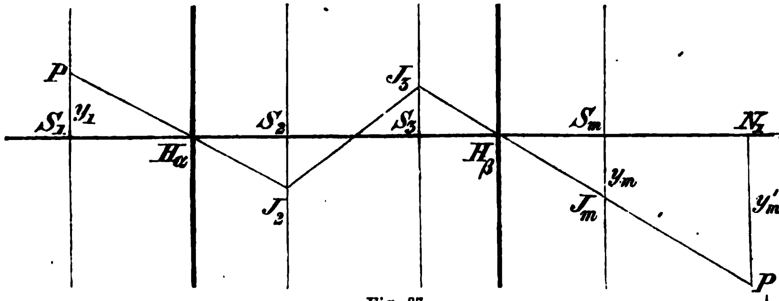


Fig. 37.

letzten Bildes von P und $S_m J_m = y_m$ die Ordinate des Strahles in dem Scheitelpuncte der letzten Fläche. Gehen wir von Fläche zu Fläche, so ist für die beiden leuchtenden Puncte bezüglich der Scheitelpuncte $S_1 S_2 \ldots S_m$

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{n_1 x_0}{x_1} \text{ und } \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}, \text{ also } \frac{Y_0 y_1}{v_0 x_0} = \frac{Y_1 y_2}{v_1 x_2},$$

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{n_2 x_2}{x_3} \text{ und } \frac{y_2}{y_3} = \frac{x_3}{x_4}, \text{ also } \frac{Y_1 y_2}{v_1 x_2} = \frac{Y_2 y_3}{v_2 x_4},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{Y_{m-1}}{Y_m} = \frac{n_m x_{2m-2}}{x_{2m-1}}, \quad \frac{y_{m-1}}{y_m} = \frac{x_{2m-3}}{x_{2m-2}}, \text{ also } \frac{Y_{m-1} y_m}{v_{m-1} x_{2m-2}} = \frac{Y_m y_m}{v_m x_{2m-1}}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen sämmtlich mit einander, so erhält man

$$\frac{Y_0 y_1}{v_0 x_0} = \frac{Y_m y_m}{v_m x_{2m-1}}.$$

Da aber Y_0 und Y_m in den Hauptebenen liegen, so ist $Y_m = Y_0$, $x_0 = \alpha_1$ und $x_{2m-1} = \alpha_2$, wo α_1 und α_2 die Abstände der Vorder- und Hinterfläche von den Hauptebenen bedeuten; also

$$\frac{y_1}{v_0 \alpha_1} = \frac{y_m}{v_m \alpha_2}.$$

Weil nun y_m' das Bild von y_1 ist, so ist

$$y_1 : y_m' = (-\varphi \times H_\alpha S_1) : (f \times H_\beta N_1).$$

Es ist aber $\quad y_m' : y_m = H_\beta N_1 : H_\beta S_m,$

folglich $\quad y_1 : y_m = -\varphi \alpha_1 : f \alpha_2 \qquad$ (Vgl. § 19 1) b).

Setzen wir dies in die vorhergehende Gleichung ein, so erhalten wir wieder Gleichung (18).

Fünfter Beweis. (Neumann, die Haupt- und Brennpuncte etc.) Es sei der in der optischen Axe vor dem brechenden Systeme gelegene

Punct O (Fig. 30) der Anfangspunct eines rechtwinkligen Coordinatensystems und hinter demselben eine Reihe aufeinander folgender brechender Medien $M_0 M_1 \ldots M_m$ mit centrirten Begrenzungsflächen $S_1 S_2 \ldots S_m$. Wir betrachten zunächst ein Paar conjugirter Puncte P_0 und P_1 bezüglich der Fläche S_1, indem wir die Ordinaten derselben mit y_0 und y_1, ihre Abscissen vom Scheitelpuncte S_1 angerechnet mit s_0 und s_1 bezeichnen. In diesem Falle ist

$$\frac{f_1}{s_0} + \frac{\varphi_1}{s_1} = 1, \quad \frac{y_0 f_1}{s_0} = \frac{-y_1 \varphi_1}{s_1}.$$

Der Abstand des Scheitelpunctes S_1 von O sei gleich a, so ist, wenn die neuen Abscissen mit x_0 und x_1 bezeichnet werden,

$$s_0 = x_0 - a, \quad s_1 = x_1 - a.$$

Substituiren wir diese Gleichungen in die beiden vorigen, so erhalten wir

$$\frac{f_1}{x_0 - a} + \frac{\varphi_1}{x_1 - a} = 1, \quad \frac{y_0 f_1}{x_0 - a} = - \frac{y_1 \varphi_1}{x_1 - a}.$$

Sind ξ_0, η_0 die Coordinaten irgend eines andern Punctes Π, ξ_1 η_1 die seines Bildes Π_1, so ist offenbar auch

$$\frac{f_1}{\xi_0 - a} + \frac{\varphi_1}{\xi_1 - a} = 1, \quad \frac{\eta_0 f_1}{\xi_0 - a} = - \frac{\eta_1 \varphi_1}{\xi_1 - a}.$$

Aus der ersten Ordinatengleichung ergibt sich

$$\frac{y_0}{y_1} \cdot \frac{f_1}{x_0 - a} = - \frac{\varphi_1}{x_1 - a},$$

aus der zweiten

$$\frac{\eta_0}{\eta_1} \cdot \frac{f_1}{\xi_0 - a} = - \frac{\varphi_1}{\xi_1 - a}.$$

Substituirt man diese in die zugehörigen Abscissengleichungen, so ergibt sich daraus

$$x_0 - a = f_1 \left(1 - \frac{y_0}{y_1}\right),$$

$$\xi_0 - a = f_1 \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_1}\right).$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen von einander, so findet man

$$x_0 - \xi_0 = f_1 \left(\frac{\eta_0}{\eta_1} - \frac{y_0}{y_1}\right) = f_1 \frac{y_1 \eta_0 - y_0 \eta_1}{y_1 \eta_1}.$$

In gleicher Weise findet man

$$x_1 - \xi_1 = - \varphi_1 \left(\frac{y_1}{y_0} - \frac{\eta_1}{\eta_0}\right) = - \varphi_1 \frac{y_1 \eta_0 - y_0 \eta_1}{y_0 \eta_0}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{f_1 y_0 \eta_0}{x_0 - \xi_0} = - \frac{\varphi_1 y_1 \eta_1}{x_1 - \xi_1}$$

und weil $\quad f_1 = - \frac{r_1}{n_1 - 1}, \quad \varphi_1 = \frac{n_1 r_1}{n_1 - 1}, \quad n_1 = v_0 : v_1 \quad$ ist,

so kann man statt jener Gleichung schreiben

$$\frac{y_0 \eta_0}{v_0(x_0 - \xi_0)} = \frac{y_1 \eta_1}{v_1(x_1 - \xi_1)}.$$

Eine ähnliche Beziehung findet natürlicherweise Statt zwischen den Coordinaten der Bildpuncte P_1 und Π_1 im Medium M_1 und ihrer Bildpuncte P_2 und Π_2 im Medium M_2. Bezeichnen wir diese Coordinaten in entsprechender Weise mit erhöhten Indices, diejenigen der Bildpuncte P_m und Π_m im letzten Medium M_m mit y_m, η_m, x_m, ξ_m und v_m, so ist offenbar

$$\frac{y_0 \eta_0}{v_0(x_0 - \xi_0)} = \frac{y_m \eta_m}{v_m(x_m - \xi_m)}.$$

Von besonderem Interesse ist nun der Fall, wo die Puncte (ξ_0, η_0) und (ξ_m, η_m) in den Hauptebenen des Systems liegen. In diesem Falle ist $\eta_m = \eta_0$ und wenn H_0 und H_1 zugleich die Abscissen der beiden Hauptpuncte bezeichnen,

$$\xi_0 = H_0, \quad \xi_m = H_1.$$

Dadurch verwandelt sich die vorige Gleichung in die neue

$$\frac{y_0}{v_0(x_0 - H_0)} = \frac{y_m}{v_m(x_m - H_1)}.$$

Bezeichnen f und φ die Hauptbrennweiten des ganzen Systems, so ist mit Berücksichtigung von Fig. 30 gemäss (10)

$$f \cdot \frac{PN}{H_\alpha N} = - \varphi \frac{P_1 N_1}{H_\beta N_1}.$$

Die Entfernungen OF und $O\Phi$ mögen nun ebenfalls der Kürze halber mit F und Φ bezeichnet werden, dann ist mit Berücksichtigung des Vorzeichens der Richtungen

$$\begin{aligned} f &= F - H_0, & \varphi &= \Phi - H_1, \\ H_\alpha N &= x_0 - H_0, & H_\beta N_1 &= x_m - H_1, \\ PN &= y_0, & P_1 N_1 &= y_m. \end{aligned}$$

Hierdurch geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{(F - H_0) y_0}{x_0 - H_0} = \frac{(H_1 - \Phi) y_m}{x_m - H_1}.$$

Es ging vorher die Gleichung

$$\frac{y_0}{v_0(x_0 - H_0)} = \frac{y_m}{v_m(x_m - H_1)};$$

aus beiden geht hervor

$$v_0(F - H_0) = v_m(H_1 - \Phi).$$

Nun ist aber $F - H_0 = f$, $H_1 - \Phi = - \varphi$, woraus in Uebereinstimmung mit (18) resultirt

$$- f v_0 = \varphi v_m.$$

§ 21. **Successive Bestimmung der Brennweiten, sowie der Oerter der Haupt- und Knotenpuncte eines Systems.** Die Cardinalpuncte und dioptrischen Constanten eines Systems von brechenden Flächen lassen sich entweder in der Weise bestimmen, dass man sie erst für zwei Flächen berechnet und dies System mit der dritten Fläche vereinigt u. s. f. bis zur letzten Fläche, oder dass man die Flächen in Systeme gruppirt und diese Systeme combinirt oder auch endlich, indem man die Berechnung für sämmtliche Flächen auf einmal ausführt. Wir wollen uns zunächst des ersten Verfahrens bedienen und also zwei Flächen mit einander verbinden, deren Gleichungen in Scheitelpunctscoordinaten lauten:

$$\frac{f_1}{s_0} + \frac{\varphi_1}{s_1} = 1, \quad \frac{f_2}{s_2} + \frac{\varphi_2}{s_3} = 1.$$

Die Abscissen s_0 und s_1 beziehen sich auf S_1, die Abscissen s_2 und s_3 auf S_2. Die Entfernung $S_1 S_2$ oder der Abstand der Flächen sei d_1, die Hauptbrennweiten des Systems seien f und φ, α_1 und α_2 die Entfernungen der Scheitelpuncte S_1 und S_2 von den Hauptpuncten $H_{\alpha,1}$ und $H_{\beta,1}$ (Fig. 38). Bezeichnen ausserdem x_0 und x_1 die laufenden Abscissen zweier conjugirter Puncte bezüglich der Hauptpuncte

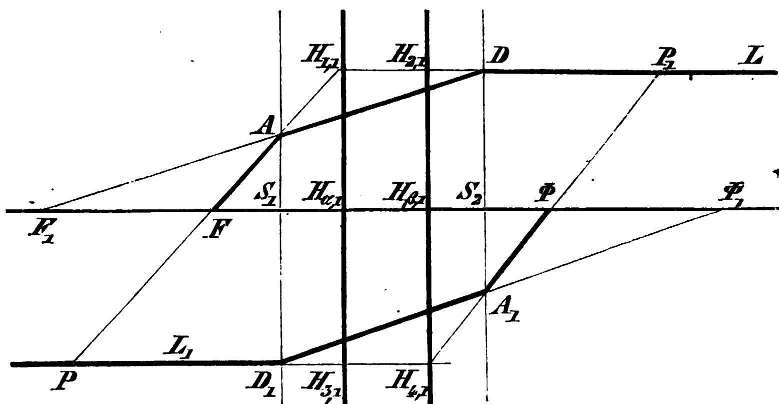


Fig. 38.

$H_{\alpha,1}$ und $H_{\beta,1}$, so handelt es sich also um die Berechnung der Constanten der Gleichung

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1.$$

Wir gehen aus von einem Focalstrahle FA; derselbe beschreibt den Weg $FADL$. F_1 ist erster Brennpunct der Fläche S_2.

Dann ist

$$s_0 = f - \alpha_1, \quad s_1 = F_1 S_1 = f_2 + d_1,$$

weil f_2 als wesentlich negativ, d_1 dagegen immer als positiv betrachtet wird. Man erhält demgemäss die Gleichung

$$\frac{f_1}{f - \alpha_1} + \frac{\varphi_1}{f_2 + d_1} = 1$$

und

$$f - \alpha_1 = f_1 \frac{f_2 + d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1}. \qquad (19)$$

Weiter ist nun α_1 zu bestimmen, welches sich leicht mittels (15a) bewerkstelligen lässt. Jedoch ist hierbei Folgendes zu bemerken. In (15a) und (16a) sind die absoluten Abstände $H_{\alpha,1} S_1$ und $H_{\beta,1} S_2$ gemeint, während in unserm vorausgesetzten Falle $H_{\alpha,1} S_1$ negativ, $H_\beta S_2$ dagegen positiv der Richtung nach ist.

Indem wir nun allgemein f und f_2 als negative, φ und φ_2 als positive Grössen ansehen und somit die Krümmungsradien r_1 und r_2 als positiv annehmen, so ist

$$\alpha_1 = -\frac{f d_1}{f_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\varphi d_1}{\varphi_1}.$$

Demgemäss wird nun

$$f - \alpha_1 = f \frac{f_2 + d_1}{f_2} = f_1 \frac{f_2 + d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1},$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = \frac{f_1 f_2}{M_1} \qquad (20)$$

und

$$\alpha_1 = -\frac{f d_1}{f_2} = -\frac{f_1 d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = -\frac{f_1 d_1}{M_1}. \qquad (21)$$

Ehe wir zur Bestimmung der übrigen Constanten fortschreiten, wollen wir noch eine andere Methode erwähnen, welche von einigen Schriftstellern, z. B. von Wüllner, angewendet wird. Man kann nämlich von den Ordinatengleichungen ausgehen und den Abstand des ersten Hauptpunctes vom Scheitel der Vorderfläche aus der bekannten Eigenschaft der Hauptebenen bestimmen, dass jeder Punct der einen das Bild des homothetischen Punctes der anderen ist.

Ist nämlich Y_0 die Ordinate eines Punctes P_0, Y_1 die des Bildes bezüglich der ersten brechenden Fläche, Y_2 die Ordinate des Bildes von Y_1, so ist nach (9)

$$Y_0 : Y_1 = (f_1 - s_0) : f_1$$
$$Y_1 : Y_2 = (f_2 - s_2) : f_2,$$

woraus folgt

$$\frac{Y_0}{Y_2} = \frac{(f_1 - s_0)(f_2 - s_2)}{f_1 f_2}.$$

Setzt man $Y_2 = Y_0$ und beachtet, dass $s_2 = s_1 - d_1$ ist, so wird

$$s_0 = \frac{f_1 d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1}$$

und wegen $s_0 = -\alpha_1$,

$$\alpha_1 = -\frac{f_1 d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = -\frac{f_1 d_1}{M_1}. \qquad (22)$$

Wir wollen später eine Verallgemeinerung dieser Methode geben und wenden uns der Betrachtung des Weges eines Focalstrahles $A_1 \Phi$

zu. Derselbe beschreibt den Weg $L_1 D_1 A_1 \Phi$. Es ist nun Φ_1 zweiter Brennpunct der Fläche S_2. Beachtet man, dass

$$s_2 = \varphi_1 - d_1, \quad s_3 = \varphi - \alpha_2$$

ist, so gibt die andere Abscissengleichung

$$\frac{f_2}{\varphi_1 - d_1} + \frac{\varphi_2}{\varphi - \alpha_2} = 1$$

und

$$\varphi - \alpha_2 = \varphi_2 \frac{-\varphi_1 + d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1}.$$

Weiter ist nach (15b)

$$\alpha_2 = \frac{\varphi d_1}{\varphi_1},$$

also

$$\varphi - \alpha_2 = \varphi \frac{\varphi_1 - d_1}{\varphi_1} = \varphi_2 \frac{-\varphi_1 + d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1}.$$

Hieraus folgt

$$\varphi = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{M_1} \tag{23}$$

und

$$\alpha_2 = \frac{\varphi d_1}{\varphi_1} = \frac{-\varphi_2 d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = \frac{-\varphi_2 d_1}{M_1}. \tag{24}$$

Durch die Gleichungen (19) bis (24) ist alles bestimmt. Die Abscissengleichung eines Systems von zwei Flächen bezüglich der Hauptpuncte ist also

$$\frac{f_1 f_2}{M_1} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{(-1)^1 \varphi_1 \varphi_2}{M_1} \cdot \frac{1}{x_1} = 1. \tag{25}$$

Es ist noch zu bemerken, dass F_1 und Φ_1 identisch sind mit den Puncten U_α und U_β und dass die Puncte bei nur zwei Flächen die *wahren*, nicht die *falschen* Brennpuncte der Hinter- und Vorderfläche sind.

Wir fügen jetzt die dritte Fläche S_3 hinzu von der Eigenschaft

$$\frac{f_3}{s_4} + \frac{\varphi_3}{s_5} = 1.$$

Die Dicke der Schicht $S_2 S_3$ sei gleich d_2 und der Abstand der dritten Fläche vom zweiten Hauptpuncte $H_{\beta,1}$ des ersten Systems gleich $D_2 = d_2 + \alpha_2$. Sind wiederum f und φ die Hauptbrennweiten des neuen Systems, so handelt es sich wieder um die Bestimmung der Constanten der Gleichung

$$\frac{f'}{x_0} + \frac{\varphi'}{x_1} = 1.$$

Es seien in einem bestimmten Falle die Abscissen zweier conjugirter Puncte der Gleichung (25) resp. h_0 und h_1, so ist

$$\frac{f_1 f_2}{M_1} \cdot \frac{1}{h_0} + \frac{(-1)^1 \varphi_1 \varphi_2}{M_1} \cdot \frac{1}{h_1} = 1.$$

Weiter sind folgende Substitutionen vorzunehmen:

$$h_0 = f - \alpha_3, \quad h_1 = f_3 + D_2.$$

Es bedeutet α_3 die Entfernung des ersten Hauptpunctes $H_{\alpha,1}$ des ersten Systems vom ersten Hauptpuncte $H_{\alpha,2}$ des neuen Systems; $\alpha_1 + \alpha_3$ ist dann die Entfernung des Punctes des Scheitelpunctes S_1 vom Hauptpuncte $H_{\alpha,2}$. Es ist nun gemäss (15a)

$$\alpha_3 = -\frac{fD_2}{f_3}$$

also $h_0 = f - \alpha_3 = f\frac{f_3 + D_2}{f_3}$. Mithin verwandelt sich (25) in

$$\frac{f_1 f_2 f_3}{fM_1(f_3 + D_2)} + \frac{(-1)^1 \varphi_1 \varphi_2}{M_1(f_3 + D_2)} = 1,$$

und es ist

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3}{M_1\left(f_3 - \frac{(-1)^1 \varphi_1 \varphi_2}{M_1} + D_2\right)} = \frac{f_1 f_2 f_3}{M_1 M_2}, \qquad (26)$$

$$\alpha_3 = \frac{-f_1 f_2 D_2}{M_1 M_2} \quad (27), \quad f - \alpha_3 = \frac{f_1 f_2 (f_3 + D_2)}{M_1 M_2}. \qquad (28)$$

Ferner ist $s_4 = \frac{(-1)^1 \varphi_1 \varphi_2}{M_1} - D_2$, $s_5 = \varphi - \alpha_4$ und gemäss (15b)

$$\alpha_4 = \frac{\varphi D_2}{(-1)^1 \varphi_1 \varphi_2 : M_1}.$$

Substituirt man die Werthe

$$s_4 = \frac{(-1)^1 \varphi_1 \varphi_2}{M_1} - D_2, \qquad s_5 = \varphi - \alpha_4 = \varphi\left(1 - \frac{D_2}{(-1)^1 \varphi_1 \varphi_2 : M_1}\right)$$

in die Gleichung der dritten Fläche, so resultirt

$$\varphi = \frac{(-1)^2 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{M_1\left(f_3 - \frac{(-1)^1 \varphi_1 \varphi_2}{M_1} + D_2\right)} = \frac{(-1)^2 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{M_1 M_2} \qquad (29)$$

und

$$\alpha_4 = \frac{\varphi D_2}{(-1)^1 \varphi_1 \varphi_2 : M_1} = -\frac{\varphi_3 D_2}{M_2}. \qquad (30)$$

Man kann nun die Substitution einer vierten Fläche vornehmen, wobei gesetzt wird

$$f_4 - \frac{(-1)^2 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{M_1 M_2} + D_3 = M_3$$

$$D_3 = d_3 + \alpha_4,$$

indem D den jedesmaligen Abstand der hinzukommenden Fläche vom zweiten Hauptpuncte des letzten Systems bezeichnet. Bei a Flächen ist alsdann

$$\frac{f_1 f_2 f_3 \cdots f_a}{M_1 M_2 M_3 \cdots M_{a-1}} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{(-1)^{a-1} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_a}{M_1 M_2 M_3 \cdots M_{a-1}} \cdot \frac{1}{x_1} = 1$$

oder wegen

$$\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_a = n_1 n_2 \cdots n_a \cdot f_1 f_2 \cdots f_a (-1)^a$$

$$\frac{F_a}{x_0} + \frac{(-1)\, n_1 n_2 \cdots n_a F_a}{x_1} = 1. \qquad (31)$$

Hieraus folgt ebenfalls das in § 20 bewiesene Theorem. Setzen wir nämlich

$$n_1 n_2 n_3 \cdots n_a = v_0 : v_a,$$

so ist

$$\varphi : f = -(v_0 : v_a)\frac{F_a}{F_a} = -v_0 : v_a,$$

also:

$$-f v_0 = \varphi v_a.$$

Dabei ist

$$f = \frac{f_1 f_2 \cdots f_a}{M_1 M_2 \cdots M_{a-1}}, \quad \varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_a}{M_1 M_2 \cdots M_{a-1}}$$

und ferner

$$\alpha_{2a-3} = -\frac{f_1 f_2 \cdots f_{a-1} D_{a-1}}{M_1 M_2 \cdots M_{a-1}}, \quad \alpha_{2a-2} = -\frac{\varphi_a D_{a-1}}{M_{a-1}}. \quad (32)$$

Der Abstand des ersten Hauptpunctes der letzten Combination der a Flächen von S_1 ist offenbar

$$-(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \cdots \alpha_{2a-3}) = +\frac{f_1}{M_1}\left[d_1 + \frac{f_2}{M_2}(D_2 + \frac{f_3}{M_3}(D_3 + \cdots))\right] \quad (33)$$

und der Abstand des zweiten Hauptpunctes der letzten Combination von S_a ist

$$-\alpha_{2a-2} = \frac{\varphi_a D_{a-1}}{M_{a-1}}.$$

Wir fügten in der vorstehenden Betrachtung immer eine neue Fläche hinter der letzten hinzu. Wir werden im folgenden Abschnitt statt einzelner Flächen Systeme zu combiniren suchen.

Man kann die zweite Brennweite jeder folgenden Combination nun successive aus der vorigen auch dadurch herleiten, dass man in ihrem Ausdruck statt der zweiten Brennweite des vorletzten Systems die zweite Brennweite des letzten Systems einführt in reciproker Form.

Es folgt nämlich, wenn wir die zweite Brennweite des ersten Systems $(S_1 S_2)$ mit φ' bezeichnen, die des Systems $(S_1 S_3)$ mit φ'' u. s. f. (aus 23):

$$\frac{1}{\varphi'} = \frac{\varphi_1 - f_2 - d_1}{\varphi_1 \varphi_2}, \quad \frac{1}{f'} = \frac{(-1)}{\varphi'} \cdot \frac{\varphi_1 \varphi_2}{f_1 f_2},$$

aus (29):

$$\frac{1}{\varphi''} = \frac{\varphi' - f_3 - D_2}{\varphi' \varphi_3}, \quad \frac{1}{f''} = \frac{(-1)^2}{\varphi''} \cdot \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{f_1 f_2 f_3},$$

für vier Flächen also

$$\frac{1}{\varphi'''} = \frac{\varphi'' - f_4 - D_3}{\varphi'' \varphi_4}, \quad \frac{1}{f'''} = \frac{(-1)^3}{\varphi'''} \cdot \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4}{f_1 f_2 f_3 f_4}.$$

§ 22. **Successive Bestimmung der Oerter der Cardinalpuncte einer Combination von Systemen.** Wir beginnen mit der Combination zweier auf einander folgenden Systeme I und II (Fig. 39), wo die Lage der Haupt- und Brennpuncte und der Abstand der innern Hauptpuncte gegeben sind. Es seien Φ_1 der zweite Hauptbrennpunct,

S_1 der Scheitelpunct der Vorderfläche, $H_{\alpha,1}$ $H_{\beta,1}$ die Hauptpuncte des Systems I; ferner F_2 der erste Hauptbrennpunct, S_2 der Scheitelpunct der Hinterfläche, $H_{\alpha,2}$ $H_{\beta,2}$ die Hauptpuncte des Systems II. Wir setzen weiter voraus, dass der Abstand $H_{\beta,2}$ $H_{\alpha,1}$ gleich D_1 sei

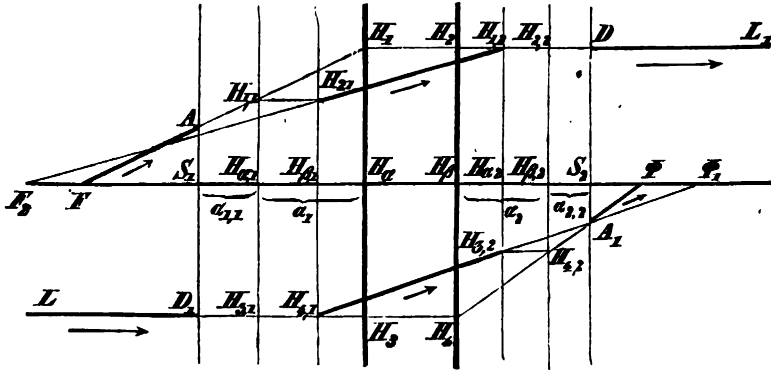


Fig. 39.

und positiv gerechnet, wenn $H_{\alpha,2}$ hinter $H_{\beta,1}$ liegt. Die Brennweiten des Systems I seien f_1 und φ_1, die des andern Systems f_2 und φ_2. Wir suchen die Brennweiten f und φ der Combination, sowie die Lagen der Hauptpuncte H_α und H_β. Wenn dabei angenommen wird, dass

$$H_{\alpha,1}S_1 = \alpha_{1,1}\,, \qquad H_{\beta,2}S_2 = \alpha_{2,2}$$
$$H_\alpha H_{\alpha,1} = \alpha_1\,, \qquad H_\beta H_{\beta,2} = \alpha_2$$

ist, so findet man nach Bestimmung dieser Grössen den Abstand der Vorderfläche S_1 vom ersten Hauptpunct H_α und den Abstand der Hinterfläche S_2 vom zweiten Hauptpuncte H_β durch Addition, nämlich

$$H_\alpha S_1 = \alpha_{1,1} + \alpha_1\,, \qquad H_\beta S_2 = \alpha_{2,2} + \alpha_2\,.$$

Das Bild des ersten Hauptbrennpuncts F der Combination ist nun offenbar der erste Brennpunct F_2 des Systems II. Der Focalstrahl FA beschreibt den Weg $FH_{1,1}H_{2,1}H_{1,2}DL_1$ und der innere Theil $H_{2,1}H_{1,2}$ divergirt aus F_2. Der zweite Hauptbrennpunct Φ des combinirten Systems ist das Bild vom zweiten Brennpunct Φ_1 des Systems I. Der von vorne eintretende Parallelstrahl LD_1 beschreibt den Weg $LD_1H_{4,1}H_{3,2}H_{4,2}A_1\Phi$ und der innere Theil $H_{4,1}H_{3,2}$ convergirt in Φ_1.

Wenn wir die Abscissen conjugirter Puncte bezüglich der Hauptpuncte mit h bezeichnen, so ist demnach $H_{\beta,1}F_2$ gleich h_1 der Gleichung

$$\frac{f_1}{h_0} + \frac{\varphi_1}{h_1} = 1\,, \quad \text{(System I)},$$

und $H_{\alpha,2}\Phi_1$ gleich h_2 der Gleichung

$$\frac{f_2}{h_2} + \frac{\varphi_2}{h_3} = 1\,, \quad \text{(System II)}.$$

Ferner ist $H_{\alpha,1}F = h_0$ und $h_1 = f_2 + D_1$; mithin

$$H_{\alpha,1}F = h_0 = f_1 \frac{h_1}{h_1 - \varphi_1} = f_1 \frac{f_2 + D_1}{f_2 - \varphi_1 + D_1}$$

der Gleichung (19) entsprechend.

Ebenso ist $H_{\beta,2}\Phi = h_3$ und $h_2 = \varphi_1 - D_1$; mithin

$$H_{\beta,2}\Phi = h_3 = \varphi_2 \frac{h_2}{h_2 - f_2} = \varphi_2 \frac{-\varphi_1 + D_1}{f_2 - \varphi_1 + D_1}$$

der Gleichung (22) entsprechend.

Gemäss der Bedeutung von α_1 und α_2 ist nun weiter

$$H_{\alpha,1}F = h_0 = f - \alpha_1,$$
$$H_{\beta,2}\Phi = h_3 = \varphi - \alpha_2.$$

In Verbindung mit den vorhergehenden Gleichungen erhält man nun

$$f - \alpha_1 = f_1 \frac{f_2 + D_1}{f_2 - \varphi_1 + D_1},$$

und

$$\varphi - \alpha_2 = \varphi_2 \frac{-\varphi_1 + D_1}{f_2 - \varphi_1 + D_1}.$$

Um f, φ, α_1 und α_2 einzeln zu erhalten, suchen wir eine zweite Gleichung für α_1 und α_2 entsprechend den Formeln (15a) und (15b). Aus Fig. 39 ergeben sich folgende Proportionen:

$$\frac{H_{\alpha,1}F}{H_\alpha F} = \frac{H_{\alpha,1}H_{1,1}}{H_\alpha H_1} = \frac{H_{\beta,1}H_{2,1}}{H_{\alpha,2}H_{1,2}} = \frac{H_{\beta,1}F_2}{H_{\alpha,2}F_2}$$

oder.

$$\frac{f - \alpha_1}{f} = \frac{f_2 + D_1}{f_2}, \quad \alpha_1 = -\frac{fD_1}{f_2}.$$

Analog findet man

$$\frac{\varphi - \alpha_2}{\varphi} = \frac{\varphi_1 - D_1}{\varphi_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\varphi D_1}{\varphi_1}.$$

Demnach ist

$$f - \alpha_1 = f \frac{f_2 + D_1}{f_2} = f_1 \frac{f_2 + D_1}{f_2 - \varphi_1 + D_1} \tag{34}$$

und

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - \varphi_1 + D_1} = \frac{f_1 f_2}{M_1} \tag{35}$$

$$\alpha_1 = -\frac{fD_1}{f_2} = -\frac{f_1 D_1}{f_2 - \varphi_1 + D_1} = -\frac{f_1 D_1}{M_1}. \tag{36}$$

Andrerseits ergeben sich die Relationen

$$\varphi - \alpha_2 = \varphi \frac{\varphi_1 - D_1}{\varphi_1} = \varphi_2 \frac{-\varphi_1 + D_1}{f_2 - \varphi_1 + D_1} \tag{37}$$

$$\varphi = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{f_2 - \varphi_1 + D_1} = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{M_1} \tag{38}$$

$$\alpha_2 = \frac{\varphi D_1}{\varphi_1} = \frac{-\varphi_2 D_1}{f_2 - \varphi_1 + D_1} = \frac{-\varphi_2 D_1}{M_1}. \tag{39}$$

Diese Gleichungen sind denen in (21) bis (24) ganz gleich. Jene gelten also auch für Systeme, wenn man statt der Abstände der

Flächen von einander die Abstände der innern Hauptpuncte einsetzt. Fügt man successive neue Systeme hinter die ersten an, so ist der Abstand des ersten Hauptpuncts der letzten Combination von a Systemen von der Vorderfläche S_1

$$-(\alpha_{1,1}+\alpha_1+\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_{2a-3}) = -\alpha_{1,1}+\frac{f_1}{M_1}\Big(D_1+\frac{f_2}{M_2}\Big(D_2+\cdots+\frac{f_{a-1}}{M_{a-1}}D_{a-1}\Big)\Big)$$

und der Abstand des zweiten Hauptpuncts der Combination von a Systemen von dem zweiten Hauptpuncte des letzten Systems

$$-\alpha_{2a-2} = \frac{\varphi_a\, D_{a-1}}{M_{a-1}}$$

und von der Hinterfläche des letzten Systems

$$-(\alpha_{2a-2}+\alpha_{2,a}) = -\alpha_{2,a}+\frac{\varphi_a\, D_{a-1}}{M_{a-1}}.$$

Nach den Entwickelungen im vorhergehenden Abschnitte ist nun für ein System von a Flächen, wenn $n_1 n_2 \ldots n_a = N_a$ gesetzt wird,

$$\frac{F_a}{x_0} - \frac{N_a\, F_a}{x_1} = 1,$$

für ein anderes System von b Flächen

$$\frac{F_b}{x_0} - \frac{N_b\, F_b}{x_1} = 1 \quad \text{u. s. f.}$$

Für k solcher Systeme ergibt sich also nach den obigen Sätzen die Hauptpunctsgleichung der Combination sehr leicht, wenn man beachtet, dass die innern Abstände der Systeme $H_{\beta,1} H_{\alpha,2}$, $H_{\beta,2} H_{\alpha,3}$ u. s. w. sind

$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ \ldots\ldots\ D_{k-1}$$

und $\Delta_1 = D_1,\ \Delta_2 = D_2 + \alpha_2,\ \Delta_3 = D_3 + \alpha_4,\ \ldots\ldots$

wo $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ die jedesmaligen Abstände des zweiten Hauptpuncts der vorhergehenden Combination vom zweiten Hauptpuncte des nächstfolgenden Systems bezeichnen.

Sind nun f und φ die Hauptbrennweiten der Combination aller Systeme, so ist immer

$$\varphi = -\mathrm{f}\,.\,N_a\,.\,N_b\,.\,N_c\ldots.\,N_r.$$

Sind endlich U_1 und U_2 die falschen Brennweiten der beiden äussersten Systeme und D ihr gegenseitiger Abstand, so ist gemäss (15a) und (15b)

$$H_a H_{a,1} = \frac{fD}{U_2},\quad H_\beta H_{\beta,k} = \frac{\varphi D}{U_1}. \qquad (40)$$

Directe Berechnung der Hauptbrennweiten bezogen auf die Vorder- und Hinterfläche eines Systems mittels eines Kettenbruches. § 23.
Die in den vorangehenden Abschnitten entwickelten Methoden der Berechnung der sechs Cardinalpuncte können weder den Anspruch

einer einfachen noch einer allgemeinen Auflösung des Problems erheben, weil man successive von einer Fläche zur anderen, oder von einem System zum andern fortschreitet. Möbius und Gauss haben einen Weg angegeben, welcher zu einer directen Lösung des Problems führt, und wir wollen in den folgenden Abschnitten Methoden entwickeln, welche zu demselben Ziele führen. Zu diesem Zwecke soll zunächst gezeigt werden, wie sich auf eine äusserst einfache Art die Entfernungen der Hauptbrennpuncte von der ersten und letzten Fläche berechnen lassen.

Gegeben sei eine Reihe von centrirten brechenden Kugelflächen $S_1 S_2 \ldots$ (Fig. 40); M_0 sei das vor S_1, M_1 das zwischen $S_1 S_2$ gelegene Medium u. s. f. Die relativen Brechungsverhältnisse seien von M_0 in M_1 gleich n_1, von M_1 in M_2 gleich n_2 u. s. w. Die Brennweiten seien f_1 und φ_1 für S_1, f_2 und φ_2 für S_2 u. s. w., sowie die laufenden Abscissen von Licht- und Bildpunct von den Scheitelpuncten $S_1 S_2 S_3 \ldots$ abgerechnet, s_0 und s_1, s_2 und s_3, u. s. f. Dann ist

$$\frac{f_1}{s_0} + \frac{\varphi_1}{s_1} = \frac{f_2}{s_2} + \frac{\varphi_2}{s_3} = \frac{f_3}{s_4} + \frac{\varphi_3}{s_5} = \ldots\ldots = 1.$$

Der Vereinfachung der geometrischen Betrachtung wegen setzen wir die Zahl von vier Flächen voraus.

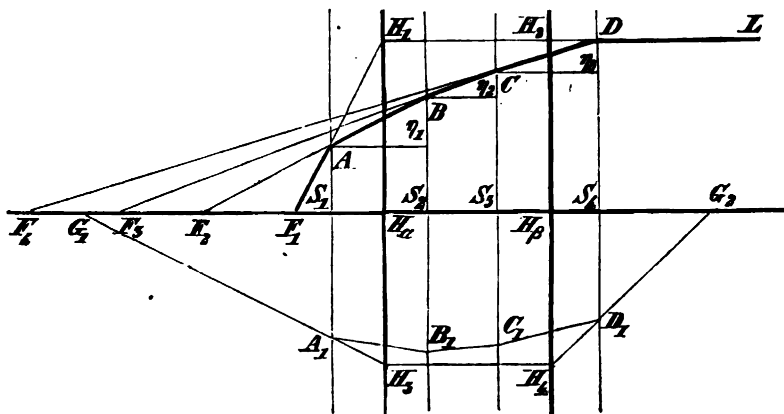


Fig. 40.

Wir nehmen an, es sei F_1 ein beliebiger leuchtender Punct in der optischen Axe und $F_1 A$ ein in die Vorderfläche eintretender und innerhalb des Systems nach L gebrochener Strahl. Derselbe werde von der ersten Fläche nach B gebrocben, in der zweiten Fläche nach C u. s. f.; es ist alsdann offenbar

F_2 der partielle Brennpunct von F_1,
F_3 - - - - F_2 u. s. f.

und ausserdem

$$\begin{aligned} S_1F_1 &= s_0, & s_1 &= S_1F_2 = S_2F_2 + d_1 \\ S_2F_2 &= s_2 = s_1 - d_1, & s_3 &= S_2F_3 = S_3F_3 + d_2 \\ S_3F_3 &= s_4 = s_3 - d_2, & s_5 &= S_3F_4 = S_4F_4 + d_3, \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich nun zu einem Kettenbruche zusammensetzen. Es ist

$$S_1F_1 = s_0 = \cfrac{f_1}{1 - \cfrac{\varphi_1}{d_1 + S_2F_2}} = \cfrac{f_1}{1 - \cfrac{\varphi_1}{d_1 + \cfrac{f_2}{1 - \cfrac{\varphi_2}{d_2 + \cdots + \cfrac{f_4}{1 - \cfrac{\varphi_4}{S_4F_5}}}}}}$$

$$S_2F_2 = s_2 = \cfrac{f_2}{1 - \cfrac{\varphi_2}{d_2 + S_3F_3}}$$

Wird $S_4F_5 = \infty$, tritt also der Strahl bei D aus dem Systeme parallel zur Axe aus, so geht F_1 in F, den ersten Hauptbrennpunct über. Der Kettenbruch schliesst in diesem Falle mit $S_4F_4 = f_4$. Man findet alsdann

S_3F_3 aus den drei letzten Gliedern des Kettenbruches,
S_2F_2 - - fünf - - - -
S_1F_1 - - sieben - - - -

Denken wir uns den Kettenbruch unter f_1 auf die gemeine Bruchform gebracht, so können wir denselben nach Euler's und Hindenburg's Bezeichnung kürzer ausdrücken:

$$1 - \cfrac{\varphi_1}{d_1 + \cfrac{f_2}{1 - \cdots - \cfrac{\varphi_3}{d_3 + \cfrac{f_4}{1}}}} = \frac{(1, -\varphi_1, d_1, f_2, 1, \cdots f_4, 1)}{(d_1, f_2, 1, \cdots f_4, 1)}. \qquad (41)$$

Löst man den Kettenbruch S_1F_1 nach S_4F_5 auf, so erhält man

$$S_4F_5 = \cfrac{\varphi_4}{1 + \cfrac{f_4}{d_3 - \cfrac{\varphi_3}{1 + \cdots + \cfrac{f_2}{d_1 - \cfrac{\varphi_1}{1 + \cfrac{f_1}{-S_1F_1}}}}}} = \cfrac{\varphi_4}{1 - \cfrac{f_4}{-d_3 + \cfrac{\varphi_3}{1 - \cdots - \cfrac{f_2}{-d_1 + \cfrac{\varphi_1}{1 - \cfrac{f_1}{S_1F_1}}}}}}$$

Wird $S_1F_1 = \infty$, tritt also der Strahl parallel zur Axe ein, so geht F_5 in Φ, den zweiten Hauptbrennpunct des Systems über; S_4F_5 wird $S_4\Phi$ oder, wenn wir von hinten nach vorne fortschreitend die Scheitelpuncte mit $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \ldots$ bezeichnen, $\Sigma_1\Phi$. Der Kettenbruch schliesst alsdann mit $\Sigma_4\Phi_4 = \varphi_1$. Man findet alsdann

$\Sigma_3\Phi_3$ aus den drei letzten Gliedern des Kettenbruches
$\Sigma_2\Phi_2$ - - fünf - - - -
$\Sigma_1\Phi$ - - sieben - - - -

Denken wir uns den Kettenbruch unter φ_4 der ersten Form wiederum auf einen gemeinen Bruch gebracht, so lässt sich derselbe kürzer ausdrücken:

$$1+\cfrac{f_4}{d_3-\cfrac{\varphi_3}{1+\cdots+\cfrac{f_2}{d_1-\cfrac{\varphi_1}{1}}}} = \frac{(1,\ f_4,\ d_3,\ -\varphi_3,\ 1,\cdots -\varphi_1,\ 1}{(d_3,\ -\varphi_3,\ 1,\ \cdots -\varphi_1,\ 1} \tag{42}$$

Aus dem Vorstehenden ergeben sich also einfach die Resultate

$$S_1 F = f_1 \cdot \frac{(d_1,\ f_2,\ 1,\ \cdots\ d_3.\ f_4,\ 1)}{(1,\ -\varphi_1,\ d_1,\ f_2,\ 1,\ \cdots\ d_3,\ f_4,\ 1)} \tag{43}$$

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_4 \frac{(d_3,\ -\varphi_3,\ 1,\ \cdots\ d_1,\ -\varphi_1.1)}{(1,\ f_4,\ d_3,\ -\varphi_3,\ 1,\ \cdots\ d_1,\ -\varphi_1,\ 1)}$$

In der Theorie der Kettenbrüche lässt sich erweisen, dass man die Reihenfolge der Elemente dieser Symbole umkehren darf, woraus folgt

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_4 \frac{(1,\ -\varphi_1,\ d_1,\ f_2,\ \cdots\ 1,\ -\varphi_3,\ d_3)}{(1,\ -\varphi_1,\ d_1,\ f_2,\ \cdots\ 1,\ -\varphi_3,\ d_3,\ f_4,\ 1)} \tag{44}$$

Es stimmen somit die Nenner dieser Bruchformen vollständig überein.

Sind statt der einzelnen Flächen Systeme mit ihren Hauptpuncten gegeben und die inneren Abstände derselben

$$H_{\beta,1}\, H_{\alpha,2} = D_1,\ H_{\beta,2}\, H_{\alpha,3} = D_2,\ H_{\beta,3}\, H_{\alpha,4} = D_3,\ \text{u. s. f.},$$

so gelten hierfür ganz dieselben Kettenbrüche und Formeln, also

$$H_{\alpha,1}\ F = f_1 \frac{(d_1,\ f_2,\ 1,\ \cdots\ d_{m-1},\ f_m,\ 1)}{(1,\ -\varphi_1,\ d_1,\ f_2,\ 1,\ \cdots\ d_{m-1},\ f_m,\ 1)} \tag{45}$$

$$H_{\beta,m}\ \Phi = \varphi_m \frac{(1,\ -\varphi_1,\ d_1,\ f_2,\ \cdots\ 1,\ -\varphi_{m-1},\ d_{m-1})}{(1,\ -\varphi_1,\ d_1,\ f_2,\ \cdots\ d_{m-1},\ f_m,\ 1)} \tag{46}$$

§ 24. **Andere Methode der Berechnung der Brennweiten $S_1 F$ und $\Sigma_1 \Phi$ durch Reduction des Kettenbruches auf einen gemeinen Bruch.** Die Kettenbrüche (43) und (44) lassen sich noch auf die halbe Anzahl ihrer Glieder bringen, indem man sie auf folgende Art transformirt:

$$S_1 F = \cfrac{f_1}{1-\cfrac{\varphi_1}{d_1+S_2F_2}} = \frac{f_1(d_1+S_2F_2)}{S_2F_2-\varphi_1+d_1} = f_1 + \frac{f_1\varphi_1}{d_1-\varphi_1+S_2F_2} \tag{47}$$

$$S_2 F_2 = \frac{f_2(d_2+S_3F_3)}{S_3F_3-\varphi_2+d_2} = f_2 + \frac{f_2\varphi_2}{d_2-\varphi_2+S_3F_3}\ \text{u. s. f.}$$

Ebenso wird

$$\Sigma_1 \Phi = \cfrac{\varphi_4}{1-\cfrac{f_4}{-d_3+\Sigma_2\Phi_2}} = \frac{\varphi_4(-d_3+\Sigma_2\Phi_2)}{\Sigma_2\Phi_2-f_4-d_3} = \varphi_4 - \frac{\varphi_4 f_4}{d_3+f_4-\Sigma_2\Phi_2} \tag{48}$$

$$\Sigma_2 \Phi_2 = \frac{\varphi_3(-d_2+\Sigma_3\Phi_3)}{\Sigma_3\Phi_3-f_3-d_2} = \varphi_3 - \frac{\varphi_3 f_3}{d_2+f_3-\Sigma_3\Phi_3}\ \text{u. s. f.}$$

Man kann also die beiden Kettenbrüche unter Voraussetzung von m Flächen folgendermassen schreiben:

$$S_1 F = f_1 + \cfrac{f_1 \varphi_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1 + \cfrac{f_2 \varphi_2}{f_3 - \varphi_2 + d_2 + \cdots + \cfrac{f_{m-1}\varphi_{m-1}}{f_m - \varphi_{m-1} + d_{m-1}}}} \tag{49}$$

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_m - \cfrac{\varphi_m f_m}{f_m - \varphi_{m-1} + d_{m-1} + \cfrac{\varphi_{m-1} f_{m-1}}{f_{m-1} - \varphi_{m-2} + d_{m-2} + \cdots + \cfrac{\varphi_2 f_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1}}} \tag{50}$$

Diese Kettenbrüche lassen sich symbolisch ebenfalls kürzer ausdrücken. Setzen wir die ersten Factoren f_1 und φ_m heraus, und schreiben den letzten Partialnenner des ersten Kettenbruchs in der Form

$$-\varphi_{m-1} + d_{m-1} + \frac{f_m}{1} = l + \frac{\mu}{m},$$

so kann man für den ganzen Bruch die folgende Form setzen:

$$S_1 F = f_1 \left(a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cdots + \cfrac{\lambda}{l + \cfrac{\mu}{m}}}} \right) = f_1 \frac{(a, \beta, b, \gamma, \cdots\cdots \gamma, l, \mu, m)}{(b, \gamma, c, \delta, \cdots\cdots \lambda, l, \mu, m)} \tag{51}$$

und für den zweiten Kettenbruch

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_m \left(m - \cfrac{\mu}{\mu + l + \cfrac{\lambda}{k + \cdots + \cfrac{\delta}{c + \cfrac{\gamma}{b}}}} \right) = \varphi_m \frac{(m, -\mu, (\mu + l), \lambda, \cdots\cdots \delta, c, \gamma, b)}{((\mu + l), \lambda, \cdots\cdots \delta, c, \gamma, b)}$$

$$= \varphi_m \frac{(b, \gamma, c, \delta, \cdots\cdots \lambda, (l + \mu), -\mu, m)}{(b, \gamma, c, \delta, \cdots \lambda, (\lambda + \mu))}$$

Es ist nun aber, wie leicht einzusehen,

$$\big((\lambda + \mu), -\mu, m\big) = l$$

und

$$(l + \mu) = (l, \mu, m);$$

folglich wird

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_m \frac{(b, \gamma, c, \delta, \cdots\cdots \lambda, l)}{(b, \gamma, c, \delta, \cdots\cdots \lambda, l, \mu, m)} \tag{52}$$

Wie man die Werthe $S_2 F_2$, $S_3 F_3$, $\cdots\cdots$ $\Sigma_2 \Phi_2$, $\Sigma_3 \Phi_3$ zu berechnen hat, ist aus den Formeln (47) und (48) leicht zu ersehen.

Directe Berechnung der Hauptbrennweiten bezogen auf die Hauptpuncte des Systems. Sind $S_1 S_2 \cdots S_m$ die Scheitelpuncte von m centrirten sphärischen Flächen, welche die $m + 1$ Medien $M_0 M_1 M_2 \cdots M_m$ von abwechselnder optischer Dichtigkeit von einander trennen, so lassen sich die Hauptbrennweiten darstellen durch die Gleichungen: § 25.

$$f = S_1 F \frac{S_2 F_2 \times S_3 F_3 \times S_4 F_4 \times \cdots\cdots S_m F_m}{(S_2 F_2 + d_1)\,(S_3 F_3 + d_2)\,(S_4 F_4 + d_3) \cdots (S_m F_m + d_{m-1})} \tag{53}$$

$$\varphi = \Sigma_1 \Phi \frac{\Sigma_2 \Phi_2 \times \Sigma_3 \Phi_3 \times \Sigma_4 \Phi_4 \times \cdots\cdots \Sigma_m \Phi_m}{(\Sigma_2 \Phi_2 - \delta_1)\,(\Sigma_3 \Phi_3 - \delta_2)\,(\Sigma_4 \Phi_4 - \delta_3) \cdots (\Sigma_m \Phi_m - \delta_{m-1})}. \tag{54}$$

Um dies Theorem zu beweisen, verfolgen wir wieder den Weg eines Lichtstrahles, welcher vom ersten Hauptpuncte F auslaufend bei A (Fig. 40) in das System einfällt, den Weg $FABCD$ beschreibt und an der Hinterfläche des Systems parallel mit der Axe austritt. Der Durchschnittspunct H_1 des Strahlenelements DL mit dem Focalstrahl FA ist ein Punct der ersten Hauptebene $H_\alpha H_1$.

Es mögen nun wie früher $d_1\, d_2 \cdots d_{m-1}$ die gegenseitigen Abstände der Scheitelpuncte oder Dicken der brechenden Schichten, y die Ordinate des Punctes A, $\eta_1\, \eta_2\, \eta_3$ die Differenzen von y oder partiellen Elevationen des Lichtstrahles von einer Fläche zur andern bezeichnen. Endlich sind F_2, F_3, F_4, .. die partiellen Brennpuncte der Strahlenelemente AB, BC, CD und $f = H_\alpha F$ die erste Hauptbrennweite. Setzen wir der Einfachheit der Betrachtung wegen wieder *vier* brechende Flächen voraus, so ergeben sich aus ähnlichen Dreiecken leicht folgende Proportionen:

$$\text{I.} \quad y : S_1 F_2 = \eta_1 : d_1$$
$$\text{II.} \quad (y + \eta_1) : S_2 F_3 = \eta_2 : d_2$$
$$\text{III.} \quad (y + \eta_1 + \eta_2) : S_3 F_4 = \eta_3 : d_3.$$

Aus I folgt IV. $(y + \eta_1) : S_2 F_2 = \eta_1 : d_1$,
aus II folgt V. $(y + \eta_1 + \eta_2) : S_3 F_3 = \eta_2 : d_2$,
aus III folgt VI. $(y + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3) : S_4 F_4 = \eta_3 : d_3$.

Bei mehr als vier brechenden Flächen ist das Gesetz dieser Proportionen leicht zu übersehen. Aus denselben lassen sich noch einige andere Relationen herleiten, nämlich

aus II und IV folgt VII. $\dfrac{d_1}{\eta_1} = \dfrac{d_2}{\eta_2} \cdot \dfrac{S_2 F_2}{S_2 F_3}$,

aus III und VI folgt VIII. $\dfrac{d_2}{\eta_2} = \dfrac{d_3}{\eta_3} \cdot \dfrac{S_3 F_3}{S_3 F_4}$.

Aus der Figur 40 ergibt sich nun

$$\frac{F H_\alpha}{F S_1} = \frac{H_\alpha H_1}{S_1 A} = \frac{S_4 D}{S_1 A}$$

oder in Verbindung mit I

$$\frac{f}{S_1 F} = \frac{y + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{y} = \frac{d_1}{\eta_1} \cdot \frac{y + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{S_1 F_2}.$$

Substituiren wir successive die Gleichungen VII und VIII in die vorhergehende Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{f}{S_1 F} = \frac{d_1}{\eta_1} \cdot \frac{S_4 D}{S_1 F_2} = \frac{S_2 F_2}{S_1 F_2} \cdot \frac{d_2}{\eta_2} \cdot \frac{S_4 D}{S_2 F_3} = \frac{S_2 F_2 \times S_3 F_3}{S_1 F_2 \times S_2 F_3} \cdot \frac{d_3}{\eta_3} \cdot \frac{S_4 D}{S_3 F_4}.$$

Schliesst die Reihe der Differenzen von y mit η_3, so ist mit Hilfe von VI

$$\frac{f}{S_1 F} = \frac{S_2 F_2 \times S_3 F_3 \times S_4 F_4}{S_1 F_2 \times S_2 F_3 \times S_3 F_4}$$
$$= \frac{S_2 F_2 \times S_3 F_3 \times S_4 F_4}{(S_2 F_2 + d_1)\,(S_3 F_3 + d_2)\,(S_4 F_4 + d_3)}.$$

Sind m brechende Flächen vorhanden, so erhält man die Gleichung (53) und in ganz ähnlicher Weise leitet man die Formel (54) ab.

Sämmtliche hierin auftretende Factoren sind nun in den oben abgeleiteten Kettenbrüchen (43) und (44), oder (49) und (50) als Glieder enthalten, woraus sich also die Hauptbrennweiten f und φ bestimmen lassen.

Setzen wir nämlich zunächst zwei brechende Flächen voraus, so ist gemäss (53)

$$f = S_1 F \frac{S_2 F_2}{(S_2 F_2 + d_1)}$$

und mit Zuziehung des Kettenbruches (47) oder (49)

$$S_2 F_2 = f_2,\ S_1 F = f_1 \left(1 + \frac{\varphi_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1}\right) = f_1 \frac{f_2 + d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1},$$

also

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = \frac{f_1 f_2}{M_1}$$

in Uebereinstimmung mit (20).

Ferner ist

$$\varphi = \Sigma_1 \Phi \frac{\Sigma_2 \Phi_2}{\Sigma_2 \Phi_2 - \delta_1},$$

und mit Zuziehung des Kettenbruchs (48) oder (50)

$$\Sigma_2 \Phi_2 = \varphi_1,\ \Sigma_1 \Phi = \varphi_2 \left(1 - \frac{f_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1}\right) = \varphi_2 \frac{-\varphi_1 + d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1},$$

also wegen $\delta_1 = d_1$

$$\varphi = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{M_1}$$

in Uebereinstimmung mit (23).

Die Abstände der Scheitelpuncte von den beiden Hauptpuncten findet man aus den Gleichungen

$$\alpha_1 = f - S_1 F \text{ und } \alpha_2 = \varphi - \Sigma_1 \Phi.$$

Untersuchen wir noch den Fall, wo *drei* Flächen gegeben sind; es ist dann $\delta_1 = d_2$, $\delta_2 = d_1$, und

$$f = S_1 F \frac{S_2 F_2 \times S_3 F_3}{(S_2 F_2 - d_1)\,(S_3 F_3 - d\,)}.$$

Mit Hülfe des Kettenbruches (49) findet man

$$S_3 F_3 = f_3,\ S_2 F_2 = f_2 \frac{f_3 + d_2}{f_3 - \varphi_2 + d_2}$$

$$S_1 F = f_1 \frac{f_2\,(f_3 + d_2) + (f_3 - \varphi_2 + d_2)\,d_1}{(f_3 - \varphi_2 + d_2)\,(-\varphi_1 + d_1) + f_2\,(f_3 + d_2)}. \quad (55)$$

Ferner ist

$$S_3 F_3 + d_2 = f_3 + d_2$$

$$S_2 F_2 + d_1 = \frac{f_2\,(f_3 + d_2) + (f_3 - \varphi_2 + d_2)\,d_1}{f_3 - \varphi_2 + d_2}.$$

Setzen wir diese Werthe in f ein, so erhalten wir

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3}{(f_3 - \varphi_2 + d_2)\,(-\varphi_1 + d_1) + f_2\,(f_3 + d_2)}$$

$$= \frac{f_1 f_2 f_3}{(f_2 - \varphi_1 + d_1)\,(f_3 + d_2) + \varphi_2\,(\varphi_1 - d_1)} = \frac{f_1 f_2 f_3}{M_1 M_2} \quad (56)$$

in völliger Uebereinstimmung mit (26).

Da nun der Divisor des Quotienten nach der in § 21 eingeführten Beziechnung gleich ist

$$M_1\left[f_3+\frac{\varphi_1\varphi_2}{M_1}+\left(d_2-\frac{\varphi_2 d_1}{M_1}\right)\right]=M_1 M_2,$$

so erhält man wieder die Formel (26).

Andrerseits ist nun

$$\varphi=\Sigma_1\Phi\frac{\Sigma_2\Phi_2\times\Sigma_3\Phi_3}{(\Sigma_2\Phi_2-\delta_1)(\Sigma_3\Phi_3-\delta_2)}.$$

Mit Hülfe des Kettenbruchs (48) findet man

$$\Sigma_3\Phi_3=\varphi_1,\ \Sigma_2\Phi_2=\varphi_2\frac{-\varphi_1+d_1}{f_2-\varphi_1+d_1},$$

$$\Sigma_1\Phi=\varphi_3\frac{\varphi_2(\varphi_1-d_1)+(f_2-\varphi_1+d_1)d_2}{(f_2-\varphi_1+d_1)(f_3+d_2)+\varphi_2(\varphi_1-d_1)}. \quad (57)$$

Ferner ist $\Sigma_3\Phi_3-\delta_1=\varphi_1-d_1$

$$\Sigma_2\Phi_2-\delta_2=\frac{\varphi_2(\varphi_1-d_1)+(f_2-\varphi_1+d_1)d_2}{f_2-\varphi_1+d_1}.$$

Setzen wir diese Werthe in φ ein, so erhalten wir

$$\varphi=\frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}{(f_2-\varphi_1+d_1)(f_3+d_2)+\varphi_2(\varphi_1-d_1)}=\frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}{M_1 M_2} \quad (58)$$

in völliger Uebereinstimmung mit (29).

Endlich ist noch

$$\alpha_1=f-S_1F=-f_1\frac{f_2 d_2+(f_3-\varphi_2+d_2)d_1}{M_1M_2}, \quad (59)$$

$$\alpha_2=\varphi-\Sigma_1\Phi=\varphi_3\frac{\varphi_2 d_1-(f_2-\varphi_1+d_1)d_2}{M_1M_2}. \quad (60)$$

Nun ist gemäss (33), (22) und (27)

$$\alpha_1=-\frac{f_1d_1}{M_1}-\frac{f_1f_2D_2}{M_1M_2}=-\frac{f_1d_1}{M_1}-\frac{f_1f_2}{M_1M_2}\left(d_2-\frac{\varphi_2d_1}{M_1}\right)$$

$$=-\frac{f_1}{M_1M_2}\left\{d_1\left(f_3+\frac{\varphi_1\varphi_2}{M_1}+d_2-\frac{\varphi_2d_1}{M_1}\right)+f_2\left(d_2-\frac{\varphi_2d_1}{M_1}\right)\right\}$$

$$=-\frac{f_1}{M_1M_2}\left\{f_2d_2+(f_3-\varphi_2+d_2)d_1\right\}.$$

Ferner ist gemäss (30)

$$\alpha_2=-\frac{\varphi_3D_2}{M_2}=\varphi_3\frac{\varphi_2d_1-M_1d_2}{M_1M_2}$$

$$=\frac{\varphi_3}{M_1M_2}\left\{\varphi_2d_1-(f_2-\varphi_1+d_1)d_2\right\}.$$

Die Formeln (59) und (60) sind demnach mit den früher genannten ebenfalls übereinstimmend.

§ 26. **Directe Berechnung der Oerter der Cardinalpuncte mittels der Kettenbruchfunctionen.** Wir gehen aus von der Betrachtung des Kettenbruchs (47) oder (49), nämlich

$$S_1 F = f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{d_1 - \varphi_1 + S_2 F_2}$$

$$S_2 F_2 = f_2 + \frac{f_2 \varphi_2}{d_2 - \varphi_2 + S_3 F_3} \text{ u. s. f.}$$

Bezeichnen K, K_1, L und L_1 *ganze* und *positive* Functionen der Grössen f, φ und d und ist von irgend einem Gliede des Kettenbruchs an

$$S_r F_r = f_r \frac{K}{K_1},$$

so ist

$$S_r F_r + d_{r-1} = \frac{-L}{K_1},$$

folglich, wie sich aus dem Gesetze des Fortschreitens der Glieder ergibt,

$$S_{r-1} F_{r-1} = f_{r-1} \left\{ 1 + \frac{\varphi_{r-1}}{\frac{-L}{K_1} - \varphi_{r-1}} \right\} = f_{r-1} \frac{-L}{-L - \varphi_{r-1} K_1}.$$

Setzt man die ganze und negative Function $-L - \varphi_{r-1} K_1$ gleich $-L_1$, so wird

$$S_{r-1} F_{r-1} = f_{r-1} \frac{-L}{-L_1}.$$

Geht man nun von $S_m F_m$ abwärts bis zur Bildung des ganzen Kettenbruches, so erhält man

$$S_m F_m = f_m \frac{A_0}{A_1}, \quad S_m F_m + d_{m-1} = \frac{-B_0}{A_1},$$

$$S_{m-1} F_{m-1} = f_{m-1} \frac{-B_0}{-B_1}, \quad S_{m-1} F_{m-1} + d_{m-2} = \frac{C_0}{-B_1},$$

. . . .

$$S_2 F_2 = f_2 \frac{\pm M_0}{\pm M_1}, \quad S_2 F_2 + d_1 = \frac{\mp N_0}{\pm M_1}$$

$$S_1 F = f_1 \frac{\mp N_0}{\mp N_1} \qquad (61)$$

je nachdem m eine *gerade* oder *ungerade* Zahl ist.

Setzen wir diese Glieder des Kettenbruchs in den Ausdruck (53), so erhalten wir den Ausdruck für die erste Hauptbrennweite, nämlich

$$f = f_1 \frac{\mp N_0}{\mp N_1} \frac{f_2 \cdot \frac{\pm M_0}{\pm M_1} \cdot f_3 \cdot \frac{\mp L_0}{\mp L_1} \cdots\cdots\cdots\cdots f_m \frac{A_0}{A_1}}{\frac{\mp N_0}{\pm M_1} \cdot \frac{\pm M_0}{\mp L_1} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{-B_0}{A_1}}$$

oder

$$f = \frac{A_0}{\mp N_1} \cdot f_1 f_2 f_3 \cdots f_m = \frac{A_0}{N_1} (-1)^{m-1} \cdot f_1 f_2 \cdots f_m.$$

Nun ist aber das letzte Glied des ganzen Kettenbruchs $S_m F_m = f_m$, also A_0 und A_1 gleich der Einheit; mithin bleibt

$$f = \frac{(-1)^{m-1} \cdot f_1 f_2 \cdots f_m}{N_1}. \qquad (62)$$

Hier bezeichnet also N_1 den absoluten Werth des Nenners des ganzen Kettenbruchs. Da nun

$$\varphi : f = -n_1 n_2 \cdots n_m = \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m : (-1)^{m-1} f_1 f_2 \cdots f_m,$$

so wird

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_m}{N_1}. \tag{63}$$

Zu demselben Werthe von φ gelangen wir nun aber auch durch eine der vorstehenden ähnliche Betrachtung. Aus der Form des Kettenbruchs (48) oder (50), nämlich

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_m - \frac{\varphi_m f_m}{d_{m-1} + f_m - \Sigma_2 \Phi_2},$$

$$\Sigma_2 \Phi_2 = \varphi_{m-1} - \frac{\varphi_{m-1} f_{m-1}}{d_{m-2} + f_{m-1} - \Sigma_3 \Phi_3}, \quad \text{u. s. f.}$$

ergibt sich Folgendes. Bezeichnen wiederum K_2, K_3, L_2, L_3 u. s. w. *ganze* und positive Functionen von f, φ und δ, und ist von irgend einem Gliede an

$$\Sigma_\varrho \Phi_\varrho = \varphi_{m+1-\varrho} \cdot \frac{K_2}{K_3},$$

so ist

$$\Sigma_\varrho \Phi_\varrho - \delta_{\varrho-1} = \frac{L_2}{K_3},$$

und nach dem Gesetze des Fortschreitens des Kettenbruchs

$$\Sigma_{\varrho-1} \Phi_{\varrho-1} = \varphi_{m+2-\varrho} \cdot \frac{L_2}{L_3}$$

$$\Sigma_{\varrho-1} \Phi_{\varrho-1} - \delta_{\varrho-2} = \frac{M_2}{L_3} \quad \text{u. s. f.}$$

Geht man nun aufwärts bis zur Bildung des ganzen Kettenbruchs, so erhält man den Werth von $\Sigma_1 \Phi$. Es folgt aber aus (51) und (52), dass die Bruchformen $\Sigma_1 \Phi$ und $S_1 F$ gleiche Nenner haben. Demnach ist

$$\Sigma_m \Phi_m = \varphi_1 \frac{A_2}{A_3}, \quad \Sigma_m \Phi_m - \delta_{m-1} = \frac{B_2}{A_3},$$

$$\Sigma_{m-1} \Phi_{m-1} = \varphi_2 \frac{B_2}{B_3}, \quad \Sigma_{m-1} \Phi_{m-1} - \delta_{m-2} = \frac{C_2}{B_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma_2 \Phi_2 = \varphi_{m-1} \frac{M_2}{M_3}, \quad \Sigma_2 \Phi_2 - \delta_1 = \frac{N_2}{M_3},$$

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_m \frac{N_2}{N_1}. \tag{64}$$

Setzen wir diese Glieder des Kettenbruchs in (54) ein, so resultirt

$$\varphi = \varphi_m \frac{N_2}{N_1} \frac{\varphi_{m-1} \frac{M_2}{M_3} \cdot \varphi_{m-2} \frac{L_2}{L_3} \cdots\cdots \varphi_1 \frac{A_2}{A_3}}{\frac{N_2}{M_3} \cdot \frac{M_2}{L_3} \cdots\cdots \frac{B_2}{A_3}}$$

oder

$$\varphi = \frac{A_2 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_m}{N_1}.$$

Da nun φ für $m = 1$ positiv sowie A_2 und A_3 gleich der Einheit sind, so ist

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m}{N_1}$$

in Uebereinstimmung mit (63).

Stellen wir die Formeln (51), (52), (61), (62), (63) und (64) zusammen, so ergibt sich

$$S_1 F = f_1 \frac{(a, \beta, b, \gamma, \cdots \lambda, l, \mu, m)}{(b, \gamma, \cdots \lambda, l, \mu, m)} = f_1 \frac{N_0}{N_1},$$

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_m \frac{(b, \gamma, \cdots \cdots \lambda, l)}{(b, \gamma, \cdots \cdots \lambda, l, \mu, m)} = \varphi_m \frac{N_2}{N_1},$$

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3 \cdots \cdots f_m}{(b, \gamma, \cdots \lambda, l, \mu, m)} = \frac{(-1)^{m-1} \cdot f_1 f_2 \cdots f_m}{N_1},$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \cdots \varphi_m}{(b, \gamma, \cdots \lambda, l, \mu, m)} = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m}{N_1}.$$

$$\alpha_1 = f - S_1 F = \frac{f_1 (f_2 f_3 \cdots f_m (-1)^{m-1} - N_0)}{N_1}, \qquad (65)$$

$$\alpha_2 = \varphi - \Sigma_1 \Phi = \frac{\varphi_m (\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{m-1} - N_2)}{N_1}. \qquad (66)$$

Die Berechnung der Kettenbrüche geschieht vom Anfange aus in folgender Weise. Ist nach (50)

$$S_1 F = f_1 \cdot \left[a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cdots}} \right]$$

so sind die aufeinander folgenden Näherungswerthe

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{A}{A'} = \frac{a}{1}, \quad \frac{B}{B'} = \frac{bA + \beta \cdot 1}{bA' + \beta \cdot 0}, \quad \frac{C}{C'} = \frac{cB + \gamma A}{cB' + \gamma A'} \text{ u. s. w.}$$

Der letzte Näherungswerth ist alsdann

$$\frac{(a, \beta, b, \gamma, \cdots \cdots \lambda, l)}{(b, \gamma, \cdots \cdots \lambda, l)} = \frac{N_3}{N_2},$$

und der Werth des ganzen Kettenbruches

$$\frac{(a, \beta, b, \gamma, \cdots \cdots \lambda, l, \mu, m)}{(b, \gamma, \cdots \lambda, l, \mu, m)} = \frac{N_0}{N_1},$$

wodurch alles bestimmt ist.

Zwischen diesen vier Grössen N_0, N_1, N_2, N_3 findet eine wichtige Relation Statt, welche man zur Controle der Rechnung verwenden kann; es ist nämlich

$$\frac{N_0}{N_1} - \frac{N_3}{N_2} = \pm \frac{\beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdots \mu}{N_1 N_2}. \qquad (67)$$

Wir sind in den vorstehenden Entwickelungen überall von der allgemeinsten Form des Kettenbruchs ausgegangen, indem wir die Partialzähler $\beta, \gamma, \delta, \cdots$ als von der Einheit verschieden angenommen

und in § 23 des Theorem von der Umkehrbarkeit aufgestellt haben. Euler, Möbius und Gauss setzen bei ihren Deductionen überall voraus, dass der Kettenbruch (43) auf die einfachere Form

$$\cfrac{1}{u_1+\cfrac{1}{t_1+\cfrac{1}{u_2+\cfrac{1}{t_2+\cdots\cfrac{1}{u_m}}}}} = \frac{(t_1,\ u_2,\ \cdots\ t_{m-1},\ u_m)}{(u_1,\ t_1,\ u_2,\ \cdots\ t_{m-1},\ u_m)}$$

reducirt sei. Dadurch wird freilich in der Rechnung die Unbequemlichkeit der Bruchformen der ganzen Functionen von den Grössen f, φ und d nicht gehoben.

§ 27. **Vergleichung der gewonnenen Resultate mit den Gauss'schen Gleichungen.** Gauss geht in seinen „Dioptrischen Untersuchungen" aus von dem Kettenbruche (43), bei Einführung der Elemente n, r und d. Setzt man in (43) also in

$$S_1 F = \cfrac{f_1}{1-\cfrac{\varphi_1}{d_1+\cdots+\cfrac{f_m}{1}}}$$

statt f_r und φ_r ihre Werthe wieder ein, nämlich

$$f_1 = -\frac{r_1}{n_1-1}, \qquad \varphi_1 = \frac{n_1 r_1}{n_1-1},$$

$$f_2 = -\frac{r_2}{n_2-1}, \qquad \varphi_2 = \frac{n_2 r_2}{n_2-1}, \quad \text{u. s. f.}$$

so lässt sich der Kettenbruch auf folgende Form bringen:

$$\cfrac{1}{u_1+\cfrac{1}{t_1+\cdots+\cfrac{1}{u_m}}} = \frac{(t_1,\ u_2,\ \cdots\ t_{m-1},\ u_m)}{(u_1,\ t_1,\ u_2,\ \cdots\ t_{m-1},\ u_m)},$$

wobei folgende Abkürzungen eingeführt werden,

$$-\frac{n_1-1}{r_1} = u_1,$$

$$-\frac{(n_2-1)\,n_1}{r_2} = u_2, \qquad \frac{d_1}{n_1} = t_1,$$

$$-\frac{(n_3-1)\,n_1 n_2}{r_3} = u_3, \qquad \frac{d_2}{n_1 n_2} = t_2, \quad \text{u. s. f.}$$

Nach Gauss wird nun der ganze Kettenbruch mit $\frac{l}{k}$, und der letzte Näherungswerth mit $\frac{h}{g}$ bezeichnet, wo g, h, k und l *ganze* Functionen von u und t sind. Es ist demnach

$$S_1 F = \frac{l}{k} = \frac{(t_1,\ v_2,\ \cdots\ t_{m-1},\ u_m)}{(u_1,\ t_1,\ u_2,\ \cdots\ t_{m-1},\ u_m)} \tag{68}$$

und $$\frac{h}{g} = \frac{(t_1, u_2, \cdots u_{m-1}, t_{m-1})}{(u_1, t_1, u_2, \cdots u_{m-1}, t_{m-1})}. \quad (69)$$

Daneben ist Formel (67) entsprechend

$$kh - gl = \pm 1.$$

Bezeichnen wiederum f und φ die Hauptbrennweiten von den Hauptpuncten abgerechnet, ferner α_1 und α_2 die Abstände der Vorder- und Hinterfläche des Systems von den Hauptpuncten, so ist nach Gauss

$$f = \frac{1}{k} \quad (70) \qquad \varphi = -\frac{n_1 n_2 \cdots n_m}{k} \quad (71)$$

$$\alpha_1 = \frac{1-l}{k} \quad (72) \qquad \alpha_2 = -\frac{(1-g)\, n_1 n_2 \cdots n_m}{k}. \quad (73)$$

Sind das erste und letzte Medium von gleicher optischer Dichtigkeit, so ist $n_1 n_2 \cdots n_m = 1$ und

$$f = \frac{1}{k}, \qquad \varphi = -\frac{1}{k},$$

$$\alpha_1 = \frac{1-l}{k}, \qquad \alpha_2 = -\frac{1-g}{k}.$$

Die Formeln von Gauss sind nun mit den in (62), (63), (65) und (66) aufgestellten verglichen von gleicher Art, nur mit dem Unterschiede, dass in beiden Gruppen die Bedeutung der *ganzen* Functionen eine verschiedene ist. Die Functionen, welche in jenen ganze sind, sind in diesen gebrochene und umgekehrt. Die Formeln lassen sich darnach leicht in einander übersetzen.

Erstens ist k eine *ganze* Function der Grössen $u_1, t_1, u_2 \cdots u_m$ und die Glieder Brüche, deren Nenner die Factoren

$$f_1, n_1, \frac{f_2}{n_1}, n_1 n_2, \cdots n_1 n_2 \cdots n_{m-1}, \frac{f_m}{n_1 n_2 \cdots n_{m-1}},$$

also den Generalnenner $f_1 f_2 \cdots f_m$ haben. Ferner ist l eine ganze Function der Grössen $t_1, u_2 \cdots u_m$ und die Glieder Brüche, deren Nenner die Factoren

$$n_1, \frac{f_2}{n_1}, n_1 n_2, \cdots n_1 n_2, \cdots n_{m-1}, \frac{f_m}{n_1 n_2 \cdots n_{m-1}},$$

also den Generalnenner $f_2 f_3 \cdots f_m$ haben.

Da nun angenommen werden muss, dass sowol f_1 N_0 und N_1, als auch l und k relativ prim sind, so ist

$$S_1 F = f_1 \frac{N_0}{N_1} = f_1 \frac{f_2 f_3 \cdots f_m \times l}{f_1 f_2 \cdots f_m \times k}.$$

Da nun k wesentlich negativ, l und g wesentlich positiv sind, und ebenso N_0 und N_1, so ergibt sich hieraus

$$N_1 = f_1 f_2 \cdots f_m (-1)^{m-1} k$$

und mit Hülfe von (62) $\quad f = \frac{1}{k}.$

Wegen $\varphi : f = - n_1 n_2 \cdots n_m$ ist dann auch noch

$$\varphi = - \frac{n_1 n_2 \cdots n_m}{k}.$$

Da weiter $\alpha_1 = f - S_1 F$ ist, so erhält man für den Abstand $H_a S_1$ den Werth

$$\alpha_1 = \frac{1 - l}{k}.$$

Zweitens ist g eine ganze Function von $u_1, t_1, \cdots t_{m-1}$ und die Glieder sind Brüche, deren Nenner die Factoren

$$\frac{-\varphi_1}{n_1},\ n_1,\ \frac{-\varphi_2}{n_1 n_2},\ n_1 n_2, \cdots \frac{-\varphi_{m-1}}{n_1 n_2 \cdots n_{m-1}},\ n_1 n_2 \cdots n_{m-1}$$

haben, also den Generalnenner $(-1)^{m-1} \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{m-1}$. Ferner ist k eine ganze Function von Brüchen, die den Generalnenner $f_1 f_2 \cdots f_m$ besitzen. Es ist demnach

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_m \frac{N_2}{N_1} = \varphi_m \frac{(-1)^{m-1} \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{m-1} \cdot g}{f_1 f_2 f_3 \cdots f_m \cdot k}$$

oder

$$\Sigma_1 \Phi = - \frac{n_1 n_2 \cdots n_m \cdot g}{k}.$$

Endlich ist wegen der Relation $\alpha_2 = \varphi - \Sigma_1 \Phi$ noch

$$\alpha_2 = - \frac{(1 - g) n_1 n_2 \cdots n_m}{k}.$$

§ 28. **Von der Berechnung der Bildgrössen eines Objects oder des Verhältnisses der Ordinaten conjugirter Puncte mittels Kettenbruchfunctionen. — Von den zehn Cardinalpuncten eines Systems.** — Es sei Y_0 die Ordinate eines leuchtenden Punctes P_0 im ersten Medium M_0, Y_1 die seines Bildes P_1 im zweiten Medium M_1, u. s. f. Y_m die Ordinate des letzten Bildes P_m. Die Abscissengleichungen bezüglich der einzelnen Flächen seien wiederum

$$\frac{f_1}{s_0} + \frac{\varphi_1}{s_1} = \frac{f_2}{s_2} + \frac{\varphi_2}{s_3} = \frac{f_3}{s_4} + \frac{\varphi_3}{s_5} = \cdots\cdots = 1,$$

alsdann sind Y_0, s_0 die Coordinaten von P_0,
Y_1, s_1 oder Y_1, s_2 die Coordinaten von P_1,
Y_2, s_3 oder Y_2, s_4 die Coordinaten von P_2, u. s. f.

Hierbei ist nun zugleich

$$s_2 = s_1 - d_1,$$
$$s_4 = s_3 - d_2, \text{ u. s. f.}$$

Nach Formel (9) in § 15 ist weiter

$$Y_0 : Y_1 = (f_1 - s_0) : f_1,$$
$$Y_1 : Y_2 = (f_2 - s_2) : f_2,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$Y_{m-1} : Y_m = (f_m - s_{2m-2}) : f_m.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so ergibt sich

$$\frac{Y_0}{Y_m} = \frac{(f_1 - s_0)(f_2 - s_2)(f_3 - s_4) \cdots\cdots (f_m - s_{2m-2})}{f_1 \times f_2 \times f_3 \times \cdots\cdots f_m}. \quad (74)$$

Ebenso ist nun

$$Y_0 : Y_1 = \varphi_1 : (\varphi_1 - s_1),$$
$$Y_1 : Y_2 = \varphi_2 : (\varphi_2 - s_3),$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$Y_{m-1} : Y_m = \varphi_m : (\varphi_m - s_{2m-1}).$$

Hieraus ergibt sich die zweite Relation

$$\frac{Y_m}{Y_0} = \frac{(\varphi_1 - s_1)(\varphi_2 - s_3)(\varphi_3 - s_5) \cdots\cdots (\varphi_m - s_{2m-1})}{\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3 \times \cdots \varphi_m}. \quad (75)$$

Ehe wir diese beiden Gleichungen weiter discutiren, soll gezeigt werden, wie dieselben zu einer andern Form der Gleichungen (53) und (54) führen und wie diese selbst aus ihnen hergeleitet werden können.

Es ist nämlich auch noch

$$Y_0 : Y_m = (f - x_0) : f,$$

und

$$Y_m : Y_0 = (\varphi - x_1) : \varphi,$$

wo f und φ die Hauptbrennweiten, x_0 und x_1 die Abscissen der conjugirten Puncte P_0 und P_m bezüglich der Hauptpuncte bezeichnen.

Setzt man $x_0 = \alpha_1$, betrachtet also den Scheitelpunct S_1 als Object, so wird $f - x_0 = S_1F$ und weiter

$$s_0 = 0, \qquad s_1 = 0,$$
$$s_2 = -d_1 = \sigma_2, \qquad s_3 = \varphi_2\sigma_2 : (\sigma_2 - f_2),$$
$$s_4 = s_3 - d_2 = \sigma_3, \qquad s_5 = \varphi_3\sigma_3 : (\sigma_3 - f_3) \text{ u. s. f.},$$

wo $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \cdots\cdots$ die Abscissen der Bilder des Scheitelpuncts S_1 bezüglich der zweiten, dritten, vierten Fläche u. s. f. bezeichnen. Hieraus folgt nun

$$f = S_1F \frac{f_2 \times f_3 \times f_4 \times \cdots\cdots f_m}{(f_2 - \sigma_2)(f_3 - \sigma_3)(f_4 - \sigma_4) \cdots\cdots (f_m - \sigma_m)}. \quad (76)$$

Setzt man ferner $x_1 = \alpha_2$, betrachtet also den Scheitelpunct S_m als letztes Bild, so ist $\varphi - x_1 = \Sigma_1\Phi$ und weiter

$$s_{2m-1} = 0, \qquad s_{2m-2} = 0,$$
$$s_{2m-3} = d_{m-1} = \sigma'_{m-1}, \qquad s_{2m-4} = f_{m-1}\sigma'_{m-1} : (\sigma'_{m-1} - \varphi_{m-1}),$$
$$s_{2m-5} = s_{2m-4} + d_{m-2} = \sigma'_{m-2}, \qquad s_{2m-6} = f_{m-2}\sigma'_{m-2} : (\sigma'_{m-2} - \varphi_{m-2}), \text{ u. s. f.}$$

wo $\sigma'_{m-1}, \sigma'_{m-2}, \cdots\cdots$ die Abscissen der Bilder des letzten Scheitelpunctes S_m bezüglich der vorletzten, drittletzten Fläche u. s. f. bezeichnen. Hieraus folgt

$$\varphi = \Sigma_1\Phi \cdot \frac{\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3 \times \cdots\cdots \varphi_{m-1}}{(\varphi_1 - \sigma'_1)(\varphi_2 - \sigma'_2)(\varphi_3 - \sigma'_3) \cdots\cdots (\varphi_{m-1} - \sigma'_{m-1})} \quad (77)$$

Bezeichnen wir in (53) die Dimensionen S_2F_2, S_3F_3, $\cdots\cdots$

kürzer mit $F_2, F_3, \ldots$, in (54) die Dimensionen $\Sigma_2 \Phi_2, \Sigma_3 \Phi_3, \ldots$ mit $\Phi_2, \Phi_3, \ldots$, so ist

$$f = S_1 F \frac{F_2 \times F_3 \times F_4 \cdots\cdots F_m}{(F_2 + d_1)(F_3 + d_2)(F_4 + d_3) \cdots\cdots (F_m + d_{m-1})} \qquad (78)$$

und

$$\varphi = \Sigma_1 \Phi \frac{\Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_4 \times \cdots\cdots \Phi_m}{(\Phi_2 - \delta_1)(\Phi_3 - \delta_2)(\Phi_4 - \delta_3) \cdots\cdots (\Phi_m - \delta_{m-1})}. \qquad (79)$$

$F_2, F_3, \ldots$ bezeichnen die Abscissen der Bilder des ersten Hauptbrennpunctes F bezüglich der zweiten, dritten Fläche u. s. w., $\Phi_2, \Phi_3, \ldots$ die Abscissen der Bilder des zweiten Hauptbrennpunctes Φ bezüglich der vorletzten, drittletzten Fläche u. s. w. Für m brechende Flächen ist immer

$$F_m = f_m$$

also mit Berücksichtigung der Gleichung (76)

$$\frac{f_m - \sigma_m}{f_m + d_{m+1}} = \frac{f_2 \cdot f_3 \cdots f_{m-1}}{F_2 \cdot F_3 \cdots F_{m-1}} \times \frac{(F_2 + d_1)(F_3 + d_2) \cdots (F_{m-1} + d_{m-1})}{(f_2 - \sigma_2)(f_3 - \sigma_3) \cdots (f_{m-1} - \sigma_{m-1})}. \qquad (80)$$

Diese Gleichung ist ein Ausdruck der Beziehung zwischen dem Orte des Bildes der Vorderfläche und dem des ersten Hauptpunctes.

Um nun die Gleichungen (78) und (79) aus (74) und (75) herzuleiten, erwäge man, dass

$$Y_0 : Y_m = (f - x_0) : f$$

$$(f_1 - s_0) : s_0 = -\varphi_1 : s_1, \text{ oder } (f_1 - s_0) : f_1 = n_1 s_0 : s_1,$$

$$(f_2 - s_2) : s_2 = -\varphi_2 : s_3, \qquad (f_2 - s_2) : f_2 = n_2 s_2 : s_3,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$(f_m - s_{2m-2}) : s_{2m-2} = -\varphi_m : s_{2m-1}, \qquad (f_m - s_{2m-2} : f_m = n_m s_{2m-2} : s_{2m-1}.$$

Setzt man diese Werthe in (74) ein, so erhält man

$$\frac{f - x_0}{-\varphi} = \frac{s_0 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdots\cdots s_{2m-2}}{s_1 \cdot s_3 \cdot s_5 \cdots\cdots s_{2m-1}}.$$

Nun folgt aus der Gleichung

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1,$$

die andere

$$\frac{f - x_0}{-\varphi} = \frac{x_0}{x_1}$$

und in Verbindung mit der obigen die schöne Beziehung

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{s_0 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdots\cdots s_{2m-2}}{s_1 \cdot s_3 \cdot s_5 \cdots\cdots s_{2m-1}}. \qquad (81)$$

Zu derselben Gleichung gelangt man noch einfacher durch wiederholte Anwendung von (10).

Ist nun der Hauptbrennpunct F der leuchtende Punct, so ist

$$x_0 = f$$

$$s_0 = f - \alpha_1 = S_1 F, \qquad s_2 = F_2, \quad s_1 = F_2 + d_1$$

$$x_1 = s_{2m-1} = \infty, \qquad s_4 = F_3, \quad s_3 = F_3 + d_2 \text{ u. s. f.}$$

woraus sich (78) ergibt.

Ist der Hauptbrennpunct Φ das Object, so ist

$$x_1 = \varphi$$

$$s_{2m-1} = \varphi - \alpha_2 = \Sigma_1 \Phi, \quad s_{2m-3} = \Phi_2, \quad s_{2m-2} = \Phi_2 - \delta_1,$$

$$s_0 = x_0 = \infty, \quad s_{2m-5} = \Phi_3, \quad s_{2m-4} = \Phi_3 - \delta_2, \text{ u. s. f.}$$

woraus sich (79) ergibt.

Ist endlich noch der erste Hauptpunct das Object, so ist der zweite sein Bild und

$$x_1 : x_0 = -\varphi : f = n_1 n_2 \ldots n_m,$$

$$s_0 = -\alpha_1, \quad s_{2m-1} = -\alpha_2,$$

mithin

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = n_1 n_2 \ldots n_m \cdot \frac{s_2 \times s_4 \times \cdots s_{2m-2}}{(s_2 + d_1)(s_4 + d_2) \cdots (s_{2m-2} + d_{m-1})}.$$

Bezeichnen $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{k}_1$ die Knotenpunctsdistanzen von Object und Bild, so erhält man aus (9) und (16)

$$\frac{\mathfrak{k}_0}{\mathfrak{k}_1} = \frac{k_0 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdots k_{2m-2}}{k_1 \cdot k_3 \cdot k_5 \cdots k_{2m-1}}. \tag{82}$$

Es lässt sich noch eine ähnliche Gleichung finden aus den Focaldistanzen ξ_0, ξ_1, $\xi_2 \cdots$ des Objects und der Bilder. Gemäss (7) und (8) in § 7 und § 15 ist

$$Y_0 : Y_1 = \xi_0 : (-f_1) = \varphi_1 : (-\xi_1)$$

$$Y_1 : Y_2 = \xi_2 : (-f_2) = \varphi_2 : (-\xi_3) \text{ u. s. f.}$$

und wenn Ξ_0 und Ξ_1 die Hauptbrennpunctsdistancen für P_0 und P_m bezeichnen,

$$Y_0 : Y_m = \Xi_0 : (-f) = \varphi : (-\Xi_1).$$

Aus der Verbindung sämmtlicher Gleichungen ergibt sich

$$Y_0 : Y_m = \sqrt{\frac{-\Xi_0 v_0}{\Xi_1 v_m}}$$

und

$$\frac{\Xi_0}{\Xi_1} = \frac{\xi_0 \cdot \xi_2 \cdot \xi_4 \cdots \xi_{2m-2} (-1)^{m-1}}{\xi_1 \cdot \xi_3 \cdot \xi_5 \cdots \xi_{2m-1}}. \tag{83}$$

Wählt man ferner die Puncte des symmetrischen Durchgangs zu Anfangspuncten der Abscissen l_0, l_1, $l_2 \cdots l_{2m-1}$, so ist gemäss den Formeln in § 17 oder § 7 (9c)

$$Y_0 : Y_1 = -l_0 : l_1$$

$$Y_1 : Y_2 = -l_2 : l_3, \text{ u. s. w.}$$

und wenn Λ_0 und Λ_1 die Abstände der Puncte P_0 und P_m von den Puncten L_α und L_β des symmetrischen Durchganges durch das ganze System bezeichnen,

$$Y_0 : Y_m = -\Lambda_0 : \Lambda_1.$$

Aus der Verbindung sämmtlicher Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\Lambda_0}{\Lambda_1} = \frac{l_0 \cdot l_2 \cdot l_4 \cdots l_{2m-2} (-1)^{m-1}}{l_1 \cdot l_3 \cdot l_5 \cdots l_{2m-1}}. \tag{82b}$$

Wählt man endlich die Puncte G_α und G_β, für welche die Ordinaten von P_0 und P_m gleich und antithetisch sind, zu Anfangspuncten der Abscissen Γ_0 und Γ_1, und entsprechend dieselben Puncte, welche den einzelnen Flächen des Systems entsprechen, zu Anfangspuncten der Abscissen $g_0, g_1, g_2 \cdots g_{2m-1}$, so ist gemäss den Formeln in § 17 oder § 7 (9b)

$$Y_0 : Y_1 = (f_1 + g_0) : -f_1$$
$$Y_1 : Y_2 = (f_2 + g_2) : -f_2 \text{ u. s. f.}$$
$$Y_0 : Y_m = (f + \Gamma_0) : -f.$$

also
$$\frac{f + \Gamma_0}{-f} = \frac{(f_1 + g_0)(f_2 + g_2) \cdots (f_m + g_{2m-2})}{(-f_1) \times (-f_2) \cdots \times (-f_m)}.$$

Nun folgt aus
$$\frac{-f}{\Gamma_0} + \frac{-\varphi}{\Gamma_1} = 1$$

die Gleichung
$$\frac{f + \Gamma_0}{-f} = \frac{\varphi}{f} \cdot \frac{\Gamma_0}{\Gamma_1}$$

und aus
$$\frac{-f_1}{g_0} + \frac{-\varphi_1}{g_1} = 1$$

die andere
$$\frac{f_1 + g_0}{-f_1} = -n_1 \frac{g_0}{g_1} \text{ u. s. f.}$$

Hieraus ergibt sich
$$\frac{\Gamma_0}{\Gamma_1} = \frac{g_0 \cdot g_2 \cdot g_4 \cdots g_{2m-2}\,(-1)^{m-1}}{g_1 \cdot g_3 \cdot g_5 \cdots g_{2m-1}}. \tag{81b}$$

Die Gleichungen (81), (82), (83), (81b) und (82b) haben alle eine und dieselbe Form und es lässt sich zeigen, dass dieses immer der Fall ist, wenn

$$\frac{A}{f} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_m\,(\mp 1)^{m-1}}{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_m}$$

ist, wo A der Abstand des ersten Coordinatenanfangspunctes des ganzen Systems vom ersten Hauptbrennpuncte, $a_1, a_2, \ldots$ die Abstände aller ersten Coordinatenanfangspuncte der einzelnen Flächen von ihren ersten Hauptbrennpuncten bezeichnen.

Um dieses zu beweisen, gehen wir aus von der Gleichung (4) und bestimmen ihre Constanten mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1.$$

Nach der obigen Voraussetzung sind $x_0' = A + f$, und $x_1' = \varphi\,(A + f) : A$ die Abscissen der Coordinatenanfangspuncte.

Die Abscissen von P_0 und P_m bezüglich dieser Puncte seien T_0 und T_1, so ist

$$\frac{f}{(A + f) + T_0} + \frac{\varphi}{\frac{\varphi\,(A + f)}{A} + T_1} = 1$$

oder kürzer
$$\frac{-A}{T_0} + \frac{-f\varphi : A}{T_1} = 1.$$

Hieraus folgt
$$\frac{-A-T_0}{f}=\frac{\varphi}{A}\cdot\frac{T_0}{T_1}$$
und da $Y_0 : Y_m \doteq (f-x_0) : f = -(A+T_0) : f$ ist
$$Y_0 : Y_m = \frac{\varphi}{A}\cdot\frac{T_0}{T_1}.$$

Für die einzelnen Flächen findet man nun ganz analog
$$\frac{Y_0}{Y_1}=\frac{\varphi_1\cdot t_0}{a_1\cdot t_1}$$
$$\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{\varphi_2\cdot t_2}{a_2\cdot t_3}\text{, u. s. f.}$$

Durch Verbindung aller dieser Gleichungen erhält man
$$\frac{\varphi}{A}\cdot\frac{T_0}{T_1}=\frac{\varphi_1\cdot\varphi_2\cdots\varphi_m}{a_1\cdot a_2\cdots a_m}\times\frac{t_0\cdot t_2\cdots t_{2m-2}}{t_1\cdot t_3\cdots t_{2m-1}}.$$

Nun ist
$$\frac{\varphi}{-f}=\frac{\varphi_1}{(-f_1)}\cdot\frac{\varphi_2}{(-f_2)}\cdot\frac{\varphi_3}{(-f_3)}\cdots\frac{\varphi_m}{(-f_m)},$$
mithin
$$\frac{T_0}{T_1}=\frac{t_0\cdot t_2\cdot t_4\cdots t_{2m-2}\,(\pm 1)^{m-1}}{t_1\cdot t_3\cdot t_5\cdots t_{2m-1}},$$
wenn
$$\frac{A}{f}=\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_m\,(\mp 1)^{m-1}}{f_1\cdot f_2\cdot f_3\cdots f_m}.$$

Dieser Gleichung kann in mehrfacher Weise genügt werden, indem man nämlich setzt

1) $A=-f,\quad a_1=-f_1,\quad a_2=-f_2,\ \cdots$ (Formel 81),
2) $A=\varphi,\quad a_1=\varphi_1,\quad a_2=\varphi_2,\ \cdots$ (Formel 82),
3) $A=0,\quad a_1=a_2=a_3=\cdots=0,$ (Formel 83),
4) $A=-\varphi,\quad a_1=-\varphi_1,\quad a_2=-\varphi_2,\ \cdots$ (Formel 82b),
5) $A=+f,\quad a_1=f_1,\quad a_2=f_2\ \cdots$ (Formel 81b),
6) allgemein
$$A=\pm c^m f,\quad a_1=\pm cf_1,\quad a_2=\pm cf_2\ \cdots$$
$$A=\pm c^m\varphi,\quad a_1=\pm c\varphi_1,\quad a_2=\pm c\varphi_2\ \cdots$$

Die vorstehenden fünf Puncte haben fünf andere conjugirte Puncte A_1, nämlich

	I	II	III	IV	V
$A=$	$-f\,(FH_\alpha)$	$+\varphi\,(FK_\alpha)$	$0\,(F)$	$-\varphi\,(FL_\alpha)$	$+f\,(FG_\alpha)$,
$A_1=$	$-\varphi\,(\Phi H_\beta)$	$+f\,(\Phi K_\beta)$	$0\,(\Phi)$	$-f\,(\Phi L_\beta)$	$+\varphi\,(\Phi G_\beta)$.

Sämmtliche zehn Puncte machen die *zehn* Cardinal- oder Fundamentalpuncte des Systems aus, nämlich

$H_\alpha H_\beta$ (die Hauptpuncte, Puncte gleicher, homothetischer Punctpaare),

$K_\alpha K_\beta$ (die Knotenpuncte, Puncte des gleichen Durchganges),

$F\Phi$ (die Brennpuncte),

$L_\alpha L_\beta$ (die negativen Knotenpuncte, Puncte des symmetrischen Durchganges),

$G_\alpha G_\beta$ (die negativen Hauptpuncte, Puncte gleicher antithetischer Punctpaare).

Von ihrer gegenseitigen Stellung möge folgende Figur ein geometrisches Bild geben.

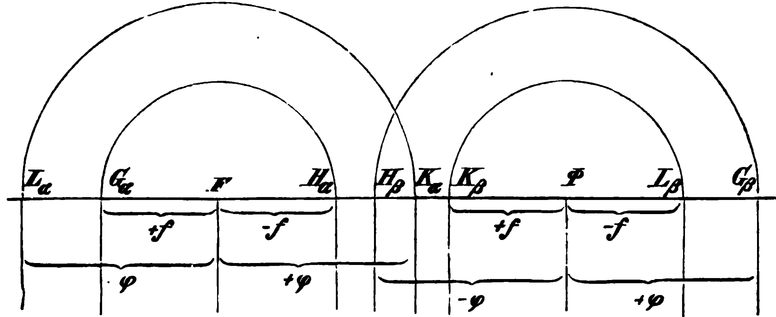


Fig. 41.

Aus derselben geht hervor, dass die folgenden Gleichungen stattfinden

$$H_\alpha H_\beta = K_\alpha K_\beta, \quad L_\alpha L_\beta = G_\alpha G_\beta;$$
$$H_\alpha K_\alpha = H_\beta K_\beta = L_\alpha G_\alpha = L_\beta G_\beta.$$

Auffallend einfach sind die geometrischen Beziehungen der gegenseitigen Lage conjugirter Puncte, wenn diese zehn Fundamentalpuncte verzeichnet sind. In Fig. 42 sei P ein leuchtender Punct, P_1 sein Bild. Von allen aus P ausfahrenden Lichtstrahlen lassen sich vor-

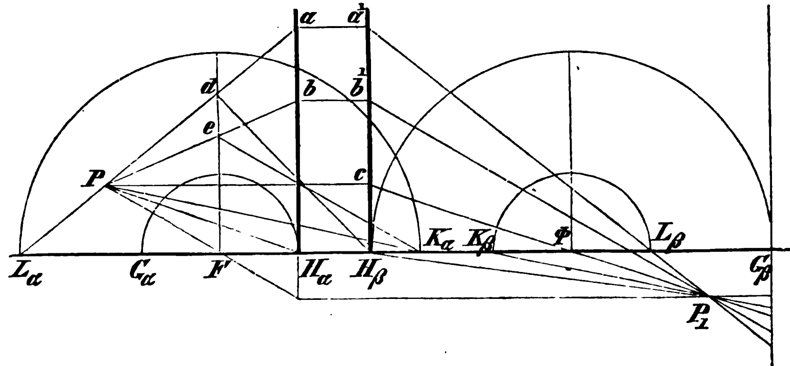


Fig. 42.

nehmlich sechs ausfahrende leicht construiren. (Man sehe § 17. Construction der Bilder.)

1) Der Strahl $L_\alpha P$ geht nach der Brechung durch L_β.

2) Ein beliebiger Strahl Pb hat in den Ebenen G_α und G_β, H_α und H_β gleiche Ordinaten.

3) Der Strahl Pc läuft parallel mit der Axe und geht durch Φ.

4) Der Strahl PK_α und sein austretender Strahl $K_\beta P_1$ sind parallel.
5) Der Strahl PH_α und der gebrochene $H_\beta P_1$ haben in F und Φ gleiche Ordinaten.
6) Der Focalstrahl PF tritt nach der Brechung parallel mit der Axe aus.

Beachtenswerth ist ebenfalls, dass eK_α stets parallel mit $b'P_1$ ist.

Wir kehren zur Gleichung (74) zurück. Mittels der Relationen

$$s_2 = s_1 - d_1, \qquad s_1 = \varphi_1 s_0 : (s_0 - f_1),$$
$$s_4 = s_3 - d_2, \qquad s_3 = \varphi_2 s_2 : (s_2 - f_2),$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$s_{2m-2} = s_{2m-3} - d_{m-1}, \quad s_{2m-3} = \varphi_{m-1} s_{2m-4} : (s_{2m-4} - f_{m-1})$$

lassen sich nun alle Abscissen $s_2, s_4 \cdots s_{2m-2}$ eliminiren, so dass nur s_0 zurückbleibt. Der Werth der Finalfunction von s_0, welcher alsdann das Verhältniss $Y_0 : Y_m$ ausdrückt, lässt sich nur durch einen Kettenbruch bestimmen in derselben Weise wie S_1F. Es ist nämlich

$$s_2 = -d_1 + s_1 = -d_1 + \frac{\varphi_1}{1 - \frac{f_1}{s_0}} = \frac{d_1(f_1 - s_0) + \varphi_1 s_0}{s_0 - f_1},$$

$$s_4 = -d_2 + s_3 = -d_2 + \frac{\varphi}{1 - \frac{f_2}{s_2}} = \frac{d_2(f_2 - s_2) + \varphi_2 s_2}{s_2 - f_2},$$

allgemein

$$s_{2m-2} = -d_{m-1} + s_{2m-3} = -d_{m-1} + \frac{\varphi_{m-1}}{1 - \frac{f_{m-1}}{s_{2m-4}}} = \frac{d_{m-1}(f_{m-1} - s_{2m-4}) + \varphi_{m-1} s_{2m-4}}{s_{2m-4} - f_{m-1}}$$

Bezeichnen nun $A, B, C \cdots a, b, c$ *ganze* Functionen von f, φ und s, so ist

$$f_1 - s_0 = A$$
$$f_2 - s_2 = \frac{a(s_0 - f_1) - \varphi_1 s_0}{s_0 - f_1} = \frac{aA + b}{A} = \frac{B}{A},$$
$$f_3 - s_4 = \frac{c(s_2 - f_2) - \varphi_2 s_2}{s_2 - f_2} = \frac{cB + d}{B} = \frac{C}{B}, \quad \text{u. s. f.}$$
$$f_m - s_{2m-2} = \frac{r(s_{2m-4} - f_{m-1}) - \varphi_{m-1} s_{2m-4}}{s_{2m-4} - f_{m-1}} = \frac{N}{M}.$$

Setzt man diese Werthe in (74) ein, so resultirt

$$\frac{Y_0}{Y_m} = \frac{A \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{C}{B} \cdots \frac{N}{M}}{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_m} = \frac{N}{f_1 f_2 \cdots f_m}.$$

Zur Berechnung des Verhältnisses der Object- und Bildgrösse bedarf es also nur der Kenntniss des Zählers N des Bruches $f_m - s_{2m-2}$. Dieser ist aber gleichbedeutend mit dem Zähler des Bruches

$$\frac{f_m - s_{2m-2}}{-s_{2m-2}} = 1 + \frac{f_m}{-s_{2m-2}}.$$

Nun ist

$$1+\frac{f_m}{-s_{2m-2}}=1+\cfrac{f_m}{d_{m-1}-\cfrac{\varphi_{m-1}}{1+\cfrac{f_{m-1}}{d_{m-2}\cdots\cdots-\cfrac{\varphi_1}{1+\cfrac{f_1}{-s_0}}}}}$$

Der Zähler dieses Kettenbruches bleibt derselbe, wenn man die Glieder umkehrt, also

$$\frac{N}{Q}=-s_0+\cfrac{f_1}{1-\cfrac{\varphi_1}{d_1+\cdots+\cfrac{f_m}{1}}}.$$

Der auf $-s_0$ folgende Kettenbruch ist aber identisch mit $S_1 F$ in (43) und (45). Wir bezeichneten ihn mit $f_1 N_0 : N_1$. Hieraus ergibt sich dann, dass N gleich dem Zähler des Bruches

$$-s_0+f_1\frac{N_0}{N_1}$$

ist, also

$$\frac{Y_0}{Y_m}=\frac{f_1 N_0-s_0 N_1}{f_1 f_2 f_3\cdots f_m}. \tag{84}$$

Da nach unserer Disposition das Verhältniss der Object- und Bildgrössen im Allgemeinen *negativ* sein soll, also $-s_0>f_1$ angenommen wird, so ist zum Divisor der Factor $(-1)^{m-1}$ hinzuzufügen, wodurch die genaue Formel wird

$$\frac{Y_0}{Y_m}=\frac{f_1 N_0-s_0 N_1}{f_1 f_2\cdots f_m(-1)^{m-1}}. \tag{85}$$

Eine ähnliche Relation lässt sich aus (75) herleiten. Mittels der Substitutionen

$$\begin{array}{ll} s_1=s_2+d_1, & s_2=f_2 s_3:(s_3-\varphi_2) \\ s_3=s_4+d_2, & s_4=f_3 s_5:(s_5-\varphi_3) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ s_{2m-3}=s_{2m-2}+d_{m-1}, & s_{2m-2}=f_m s_{2m-1}:(s_{2m-1}-\varphi_m) \end{array}$$

lassen sich alle Abscissen $s_1, s_3 \ldots s_{2m-3}$ eliminiren, so dass nur s_{2m-1} bleibt. Der Werth der Finalfunction von s_{2m-1} lässt sich durch einen Kettenbruch bestimmen von der Form des Ausdruckes für $\Sigma_1\Phi$. Es ist nämlich

$$s_1=d_1+s_2=d_1+\cfrac{f_2}{1-\cfrac{\varphi_2}{s_3}}=\frac{d_1(s_3-\varphi_2)+f_2 s_3}{s_3-\varphi_2},$$

$$s_3=d_2+s_4=d_2+\cfrac{f_3}{1-\cfrac{\varphi_3}{s_5}}=\frac{d_2(s_5-\varphi_3)+f_3 s_5}{s_5-\varphi_3},$$

allgemein

$$s_{2m-3}=d_{m-1}+s_{2m-2}=d_{m-1}+\cfrac{f_m}{1-\cfrac{\varphi_m}{s_{2m-1}}}=\frac{d_{m-1}(s_{2m-1}-\varphi_m)+f_m s_{2m-1}}{s_{2m-1}-\varphi_m}.$$

Bezeichnen nun wieder A', B', C', $\cdots a'$, b', $c' \cdots$ *ganze* Functionen von f, φ und s, so ist

$$\varphi_m - s_{2m-1} = A',$$

$$\varphi_{m-1} - s_{2m-3} = \frac{a'(s_{2m-1} - \varphi_m) - f_m s_{2m-1}}{s_{2m-1} - \varphi_m} = \frac{a'A' + b'}{A'} = \frac{B'}{A'},$$

$$\varphi_{m-2} - s_{2m-5} = \frac{c'(s_{2m-3} - \varphi_{m-1}) - f_{m-1}\, s_{2m-3}}{s_{2m-3} - \varphi_{m-1}} = \frac{c'B' + d'}{B'} = \frac{C'}{B'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_1 - s_1 = \frac{r'(s_3 - \varphi_2) - f_2 s_3}{s_3 - \varphi_2} = \frac{N'}{M'}.$$

Setzt man diese Werthe in (75) ein, so resultirt

$$\frac{Y_m}{Y_0} = \frac{\frac{N'}{M'} \cdot \frac{M'}{L'} \cdots\cdots \frac{C'}{B'} \cdot \frac{B'}{A'} \cdot A'}{\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdots \varphi_m} = \frac{N'}{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m}. \qquad (86)$$

Zur Berechnung bedarf es also nur der Kenntniss des Zählers N'. des Bruches $\varphi_1 - s_1$. Derselbe ist gleichbedeutend mit dem Zähler von

$$\frac{\varphi_1 - s_1}{-s_1} = 1 - \cfrac{\varphi_1}{d_1 + \cfrac{f_2}{1 - \cfrac{\varphi_2}{d_2 + \cdots - \cfrac{\varphi_m}{s_{2m-1}}}}}$$

Der Zähler dieses Kettenbruches bleibt derselbe, wenn man die Reihenfolge der Elemente umkehrt, wie folgt

$$s_{2m-1} - \cfrac{\varphi_m}{1 + \cfrac{f_m}{d_{m-1} - \cfrac{\varphi_{m-1}}{1 + \cdots \cfrac{f_2}{d_1 - \cfrac{\varphi_1}{1}}}}}$$

Den auf s_{2m-1} folgenden Kettenbruch bezeichnen wir wie in (64) mit $\varphi_m N_2 : N_1$, woraus sich ergibt, dass N' gleich ist dem Zähler von

$$s_{2m-1} - \varphi_m \frac{N_2}{N_1},$$

also gleich $s_{2m-1} N_1 - \varphi_m N_2$. Demgemäss ist

$$\frac{Y_m}{Y_0} = \frac{\pm (s_{2m-1} N_1 - \varphi_m N_2)}{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m}. \qquad (87)$$

Da nun mit Rücksicht auf (86) N' wesentlich negativ bleibt, so ist die genaue Formel

$$\frac{Y_m}{Y_0} = \frac{\varphi_m N_2 - s_{2m-1} N_1}{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m}. \qquad (88)$$

Neue Methode der Berechnung der Cardinalpuncte mittels der Ordinatengleichungen. Die beiden wichtigen Gleichungen (85) und (88) sind unabhängig von der Bedeutung der Hauptpuncte gefunden § 29.

worden. Sie können deshalb als Ausgangspunct benutzt werden, den Begriff der Hauptpuncte und der Hauptbrennweiten nach Gauss' Definition festzustellen. Man kann nun entweder ausgehen von der Definition der Hauptpuncte, dass die Abscissengleichung conjugirter Puncte bezüglich der Hauptpuncte von derselben Form sei, wie diejenige bezüglich der Scheitelpuncte, oder dass die Hauptpuncte die Fusspuncte der Ordinaten zweier conjugirter und homothetischer Puncte seien.

1. Die Abstände zweier conjugirter Puncte (Y_0, s_0) und (Y_m, s_{2m-1}) seien an einander gebunden durch die Gleichung

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1.$$

wo x_0 und x_1 die Abscissen derselben bezüglich gewisser näher zu bestimmender Puncte H_α und H_β in der Axe, f und φ die Abstände der Hauptbrennpuncte von denselben bezeichnen.

Man kann die Abscissengleichung nun auch schreiben in der Form

$$\frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi}{\varphi - x_1}$$

und die Gleichungen (85) und (88) combiniren zu der einen

$$\frac{Y_0}{Y_m} = \frac{f_1 N_0 - s_0 N_1}{f_1 f_2 \cdots f_m (-1)^{m-1}} = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m}{\varphi_m N_2 - s_{2m-1} N_1}. \quad (89)$$

s_0 ist der Abstand des Objects von S_1, x_0 der Abstand von H_α und es sei $H_\alpha S_1 = \alpha_1$; dann ist $s_0 = x_0 - \alpha_1$. s_{2m-1} ist der Abstand des Bildes von s_m, x_1 der Abstand von H_β und es sei $H_\beta S_m = \alpha_2$; dann ist $s_{2m-1} = x_1 - \alpha_2$. Man verwandele die Quotienten nun derartig, dass der erste von der Form $\frac{f - x_0}{f}$, der zweite von der Form $\frac{\varphi}{\varphi - x_1}$ wird, also

$$\frac{Y_0}{Y_m} = \frac{\left(f_1 \frac{N_0}{N_1} + \alpha_1\right) - x_0}{\frac{f_1 f_2 \cdots f_m (-1)^{m-1}}{N_1}} = \frac{\frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m}{N_1}}{\left(\varphi_m \frac{N_2}{N_1} + \alpha_2\right) - x_1}. \quad (90)$$

Hieraus folgt offenbar

$$f = \frac{f_1 f_2 \cdots f_m (-1)^{m-1}}{N_1} = f_1 \frac{N_0}{N_1} + \alpha_1,$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m}{N_1} = \varphi_m \frac{N_2}{N_1} + \alpha_2,$$

und weiter

$$\alpha_1 = \frac{f_1 (f_2 f_3 \cdots f_m (-1)^{m-1} - N_0)}{N_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\varphi_m (\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{m-1} - N_2)}{N_1}.$$

Diese Gleichungen stimmen mit den früher gefundenen überein. Endlich folgt noch aus (85)

$$\frac{Y_0}{Y_m} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi}{\varphi - x_1} = \frac{x_0 - f - \varphi}{x_1 - f - \varphi}.$$

Vermehrt man x_0 und x_1 um $f + \varphi$, verlegt also die Coordinatenanfangspuncte von H_α und H_β nach zweien andern K_α und K_β und bezeichnet die neuen Abscissen mit k_0 und k_1, so wird

$$Y_0 : Y_m = k_0 : k_1 .$$

Die conjugirten Puncte P_0 und P_m sind also jetzt perspectivisch gelegen gegen K_α und K_β und diese Puncte werden von H_α und H_β verschieden sein für $\varphi \gtrless - f$. Setzt man die Werthe

$$x_0 = f + \varphi + k_0, \quad x_1 = f + \varphi + k_1$$

in die Ordinatengleichung ein, so wird

$$\frac{Y_0}{Y_m} = \frac{\varphi + k_0}{-f} = \frac{-\varphi}{f + k_1}$$

also

$$\frac{-\varphi}{k_0} + \frac{-f}{k_1} = 1,$$

d. i. die Abscissengleichung bezüglich der Knotenpuncte von Möbius.

Man kann aber auch den Ort dieser Cardinalpuncte aus der Gleichung (89) unabhängig bestimmen, wenn man von der Definition ausgeht, dass sie die perspectivischen Pole der conjugirten Puncte sein sollen. Es sei demnach

$$\frac{Y_1}{Y_m} = \frac{k_0}{k_1} = \frac{f_1 N_0 - s_0 N_1}{f_1 f_2 \cdots f_m (-1)^{m-1}} = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m}{\varphi_m N_2 - s_{2m-1} N_1}.$$

Der Abstand $K_\alpha S_1$ sei β_1 und der Abstand $K_\beta S_m = \beta_2$; dann ist $s_0 = k_0 - \beta_1$ und $s_{2m-1} = k_1 - \beta_1$. Man findet weiter

$$\frac{k_0}{k_1} = \frac{\left(f_1 \frac{N_0}{N_1} + \beta_1\right) - k_0}{\frac{f_1 f_2 \cdots f_m (-1)^{m-1}}{N_1}}$$

oder

$$\frac{f_1 \frac{N_0}{N_1} + \beta_1}{k_0} - \frac{\frac{f_1 f_2 \cdots f_m (-1)^{m-1}}{N_1}}{k_1} = 1.$$

Ist $k_1 = \infty$, so ist k_0 die erste Focaldistanz; sie sei f'. Ist dagegen $k_0 = \infty$, so ist k_1 die zweite Focaldistanz; sie sei φ'. Man erhält demnach

$$\frac{f'}{k_0} - \frac{\varphi'}{k_1} = 1$$

und

$$f' = f_1 \frac{N_0}{N_1} + \beta_1, \quad \varphi' = - \frac{f_1 f_2 \cdots f_m (-1)^{m-1}}{N_1}. \qquad (91)$$

Ferner hat man die Bedingungsgleichung

$$\frac{k_0}{k_1} = \frac{\frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_m}{N_1}}{\left(\varphi_m \frac{N_2}{N_1} + \beta_2\right) - k_1}$$

oder

$$\frac{-\frac{\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_m}{N_1}}{k_0}+\frac{\varphi_m\frac{N_2}{N_1}+\beta_2}{k_1}=1.$$

Es ist also auch noch

$$f'=-\frac{\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_m}{N_1},\ \varphi'=\varphi_m\frac{N_2}{N_1}+\beta_2. \qquad (92)$$

Aus (91) und (92) ergeben sich die gesuchten Werthe

$$f'=-\frac{\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_m}{N_1}=f_1\frac{N_0}{N_1}+\beta_1,$$

$$\varphi'=-\frac{f_1f_2\cdots f_m(-1)^{m-1}}{N_1}=\varphi_m\frac{N_2}{N_1}+\beta_2,$$

und weiter

$$\beta_1=\frac{-f_1N_0-\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_m}{N_1}\ (93)\quad \beta_2=\frac{-\varphi_mN_2-f_1f_2\cdots f_m(-1)^{m-1}}{N_1}.\ (94)$$

Vergleicht man diese Werthe mit den für f, φ, α_1 und α_2 gefundenen, so ist

$$f'=-\varphi,\qquad \varphi'=-f,$$
$$\beta_1=\alpha_1-f-\varphi,\quad \beta_2=\alpha_2-f-\varphi.$$

2. Zuweilen geht man auch zur Berechnung der Oerter der Cardinalpuncte aus von der Definition der Hauptebenen, dass die eine das Bild der andern ist. In diesem Falle ist $Y_m=Y_0$ und $s_0=-\alpha_1$, $s_{2m-1}=-\alpha_2$. Mithin ist

$$\frac{f_1N_0+\alpha_1N_1}{f_1f_2\cdots f_m(-1)^{m-1}}=\frac{\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_m}{\varphi_mN_2+\alpha_2N_1}=1.$$

Hieraus ergeben sich zunächst die Werthe von α_1 und α_2 und mit Hülfe der Gleichungen (61) und (64), nämlich

$$f-\alpha_1=f_1\frac{N_0}{N_1},\qquad \varphi-\alpha_2=\varphi_m\frac{N_2}{N_1}$$

auch die Werthe von f und φ. Die Gleichungen (61) und (64) sind auch in der allgemeinen Gleichung (89)

$$\frac{Y_0}{Y_m}=\frac{f_1N_0-s_0N_1}{f_1f_2\cdots f_m(-1)^{m-1}}=\frac{\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_m}{\varphi_mN_2-s_{2m-1}N_1}$$

als specielle Fälle enthalten. Setzt man nämlich $y_m=\infty$, so wird $s_0=f-\alpha_1$ und

$$f_1N_0-(f-\alpha_1)N_1=0.$$

Setzt man dagegen $Y_0=\infty$, so wird $s_{2m-1}=\varphi-\alpha_2$ und

$$\varphi_mN_2-(\varphi-\alpha_2)N_1=0.$$

In den letzten Abschnitten ist nun das dioptrische Problem in seiner ganzen Allgemeinheit gelöst und zwar für jedes beliebige System centrirter brechender Kugelflächen sowol, als auch für jede Combination von Systemen. Denn die entwickelten Formeln gelten

ebenfalls für die Combinationen, wenn f und φ dieselbe Bedeutung behalten und die Abstände der Hauptpuncte von einander, nämlich

$$H_{\beta,1} H_{\alpha,2} = d_1, \quad H_{\beta,2} H_{\alpha,3} = d_2, \quad H_{\beta,3} H_{\alpha,4} = d_3, \text{ u. s. f.}$$

gesetzt werden.

Von dem imaginären Brechungsindex oder dem totalen Brechungsvermögen eines dioptrischen Systems. Es ist zuweilen von dem *imaginären* Brechungsindex oder nach Senff's Bezeichnung dem *totalen* Brechungsvermögen eines Systems die Rede, wie man die Bestimmung eines solchen z. B. bei der Krystalllinse des menschlichen Auges mehrfach versucht hat. Wenn nämlich die Oerter der Cardinalpuncte eines Systems aus den gegebenen Elementen bestimmt sind, so kann die Frage gestellt werden, ob ein solches System durch eine einfache homogene Linse ersetzt werden kann, welche dieselbe Dicke hat und bei welcher die Krümmungsradien der Vorder- und Hinterfläche mit denen des gegebenen Systems übereinstimmen. Wir wollen in Kürze die Bedingungen herleiten, unter welchen diese Annahme gestattet ist und zeigen, wie der imaginäre Brechungsindex durch Rechnung gefunden wird, wenn die Bedingung entweder ganz oder nahezu erfüllt ist. § 30.

Aus einer Betrachtung der Figur 27 ergibt sich, dass es ausser den sechs sogenannten Cardinalpuncten F, Φ, H_α, H_β, K_α und K_β noch zwei feste Puncte U_α und U_β gibt, in welchen die optische Axe von den Linien $D_1 A_1$ und DA geschnitten wird. Wir haben sie die falschen Brennpuncte der Hinter- und Vorderfläche des Systems genannt, indem für ein homogenes System $S_1 S_2$ in der That $S_2 U_\alpha$ in f_2 und $S_1 U_\beta$ in φ_1 übergeht. Denkt man sich das System homogen, d. h. alle zwischen der ersten und letzten Fläche gelegenen Medien von gleicher optischer Dichtigkeit, so müssen zwei Lichtstrahlen PD und FA_1 innerhalb des Systems genau auf den geradlinigen Bahnen DA und $A_1 D_1$ fortlaufen, wie es bei zwei brechenden Flächen thatsächlich der Fall ist. Die Puncte U_α und U_β sind *feste* Puncte und entsprechen den Puncten F_2 und Φ_2 bei einem einfachen Systeme.

Wir setzen wieder m brechende Flächen voraus, von denen die letzte Fig. 27 entsprechend mit S_2 bezeichnet werden soll. Es ist alsdann nach den Eigenschaften des Trapezes $PH_2 P_1 H_3$

$$U_\alpha S_2 : U_\alpha S_1 = Y_1 : y = f : S_1 F,$$
$$U_\beta S_2 : U_\beta S_1 = y_1 : Y_0 = \varphi : \Sigma_1 \Phi.$$

Ist die Dicke des ganzen Systems, also $S_1 S_2 = d_1 + d_2 + d_3 \cdots d_{m-1} = D$, n der imaginäre Brechungsindex, n_m der relative Index des hinter S_2 gelegenen Mediums M_m, so ist gemäss (40)

für das brechende System der vorangehenden und der nachfolgenden Medien

$$\frac{f_1}{x_0} + \frac{\varphi_1}{x_1} = 1, \quad \frac{f_2}{x_2} + \frac{\varphi_2}{x_3} = 1.$$

Ferner sei Y_0 die Ordinate des Punctes P_0, Y_m die des Punctes P_m, und Y_r die des Punctes P_r. Dann ist bekanntlich $Y_m = Y_0$ und

$$Y_0 : Y_r = \varphi_1 : (\varphi_1 - x_1)$$
$$Y_r : Y_m = (f_2 - x_2) : f_2,$$

folglich

$$Y_0 : Y_m = \varphi_1 (f_2 - x_2) : f_2 (\varphi_1 - x_1),$$

oder da $Y_m = Y_0$ ist,

$$\varphi_1 : (\varphi_1 - x_1) = f_2 : (f_2 - x_2).$$

Hieraus folgt $$x_1 : x_2 = \varphi_1 : f_2. \tag{101}$$

Nun ist x_1 der Abstand des Punctes P_r vom zweiten Hauptpunct $H_{\beta,1}$ des ersten Systems, x_2 der Abstand desselben vom ersten Hauptpuncte $H_{\alpha,2}$ des zweiten Systems. Der Punct P_r liegt zwischen diesen Puncten und man findet seinen Ort, wenn man den Abstand $H_{\beta,1} H_{\alpha,2}$ oder $x_1 - x_2$ in zwei Theile theilt, welche sich verhalten, wie die zu diesen Hauptpuncten gehörigen Brennweiten der beiden Systeme.

Wir untersuchen weiter

b. *die Lage des Punctes P_r, dessen letzte Bilder in den Knotenebenen liegen.* Wir gehen dabei aus von den Abscissengleichungen der vor und hinter M_r gelegenen Theile des ganzen Systems bezüglich ihrer Knotenpuncte, also

$$\frac{-\varphi_1}{k_0} + \frac{-f_1}{k_1} = 1, \quad \frac{-\varphi_2}{k_2} + \frac{-f_2}{k_3} = 1.$$

Für das ganze System seien die Hauptbrennweiten f und φ, also

$$\varphi = - n_1 n_2 \cdots n_m \cdot f.$$

Alsdann ist

$$\varphi_1 = - n_1 n_2 \cdots n_r \cdot f_1,$$
$$\varphi_2 = - n_{r+1} n_{r+2} \cdots n_m f_2.$$

Nun ist nach (16)

$$Y_0 : Y_r = - \varphi_1 : (f_1 + k_1),$$
$$Y_r : Y_m = (\varphi_2 + k_2) : (- f_2).$$

Multipliciren wir beide Gleichungen mit einander, so erhalten wir mit Berücksichtigung des Verhältnisses der Ordinaten conjugirter Puncte in den Knotenebenen des ganzen Systems

$$\frac{Y_0}{Y_m} = \frac{-\varphi}{f} = \frac{\varphi_1}{f_1 + k_1} \cdot \frac{\varphi_2 + k_2}{f_2}$$

oder

$$n_1 n_2 \cdots n_r n_{r+1} \cdots n_m = \frac{- n_1 n_2 \cdots n_r \cdot f_1}{f_1 + k_1} \cdot \frac{\varphi_2 + k_2}{f_2}$$

oder

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_2 + k_2} = \frac{f_1}{f_1 + k_1}.$$

Hieraus folgt

$$k_1 : k_2 = f_1 : \varphi_2. \qquad (102)$$

Nun ist k_1 der Abstand des Punctes P_r vom zweiten Knotenpuncte $K_{\beta,1}$ des vordern Systems, k_2 der Abstand desselben, vom ersten Knotenpuncte $K_{\alpha,2}$ des hintern Systems. Der Punct P_r liegt zwischen diesen Puncten und man findet seinen Ort, indem man den Abstand $K_{\beta,1} K_{\alpha,2}$ oder $k_1 - k_2$ in zwei Theile theilt, welche sich zu einander verhalten, wie die zu diesen Knotenpuncten gehörigen Focaldistanzen.

Die vorstehenden Sätze können dazu dienen, die Oerter der Haupt- und Knotenpuncte der Combination zweier Systeme zu bestimmen. Um die Abstände α_1 des ersten Hauptpunctes $H_{\alpha,1}$ des vorderen Systems vom Hauptpuncte H_α der Combination, den Abstand α_2 des zweiten Hauptpunctes $H_{\beta,2}$ des hinteren Systems vom Hauptpuncte H_β der Combination zu berechnen, geht man aus von (101), woraus folgt

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1} = \frac{-f_2 + \varphi_1}{\varphi_1} = \frac{D}{x_1},$$

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2} = \frac{-f_2 + \varphi_1}{f_2} = \frac{D}{x_2},$$

wo D den Abstand $H_{\beta,1} H_{\alpha,2}$ bezeichnet. Für den Hauptpunct H_α geht x_0 in $-\alpha_1$, für den Hauptpunct H_β x_3 in $-\alpha_2$ über. Mithin ist

$$\frac{f_1}{-\alpha_1} + \frac{\varphi_1}{x_1} = \frac{f_1}{-\alpha_1} + \frac{\varphi_1 - f_2}{D} = 1$$

und

$$\alpha_1 = \frac{-f_1 D}{f_2 - \varphi_1 + D}.$$

Ferner ist

$$\frac{f_2}{x_2} + \frac{\varphi_2}{-\alpha_2} = \frac{\varphi_1 - f_2}{D} + \frac{\varphi_2}{-\alpha_2} = 1$$

und

$$\alpha_2 = \frac{-\varphi_2 D}{f_2 - \varphi_1 + D}$$

in Uebereinstimmung mit (36) und (39). Die Hauptbrennweiten erhält man dann mit Hülfe der Formeln (15a) und (15b), nämlich

$$\alpha_1 = \frac{-f D}{f_2}, \qquad \alpha_2 = \frac{\varphi D}{\varphi_1},$$

also

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - \varphi_1 + D}, \qquad \varphi = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{f_2 - \varphi_1 + D}.$$

Von der Construction der Hauptpuncte einer Combination, wenn die Haupt- und Brennpuncte der combinirten Systeme gegeben sind. Man kann nun auch den Ort des im vorigen Paragraphen betrachteten dioptrischen Mittelpunctes P_r oder h zur Construction § 32.

irgend zweier conjugirter (homothetischer) Puncte der Hauptebenen oder der Hauptpuncte eines Systems von zwei Flächen oder der Combination von zwei Systemen benutzen, wenn die Brennweiten gegeben sind.

Wir betrachten zuerst ein System von zwei Flächen S_1 und S_2 (Fig. 43). F_1 und Φ_1 seien die Brennpuncte der ersten Fläche S_1, F_2 und Φ_2 die der zweiten. Es trete ein beliebiger Strahl LC parallel mit der optischen Axe in die vordere Fläche ein, derselbe ist

Fig. 43.

nach der Brechung in C gegen Φ_1 gerichtet. Man mache $S_2D = S_1C$ und ziehe L_1D parallel zur optischen Axe. Der Strahl L_1D ist vor der Brechung gegen F_2 gerichtet. Der Durchschnittspunct von BC und AD sei h. Betrachten wir jetzt h als den leuchtenden Punct und ziehen die Strahlen hJ und hJ_1 parallel zur optischen Axe, so wird hJ nach F_1 und hJ_1 nach Φ_2 gebrochen. Die beiden nach vorne austretenden Strahlen CL und JF_1 schneiden sich in H_1, die beiden nach hinten austretenden Strahlen DL_1 und $J_1\Phi_2$ in dem homothetischen Puncte H_2. Beide Puncte H_1 und H_2 sind conjugirt mit h bezüglich der einzelnen brechenden Flächen, also unter sich conjugirt bezüglich des Systems. Da sie homothetisch sind, so sind es zwei Puncte der beiden Hauptebenen. Fällt man nun H_1H_α und H_2H_β senkrecht zur optischen Axe, so sind H_α und H_β die gesuchten Hauptpuncte.

Die Hauptbrennpuncte F und Φ des Systems werden nun durch Construction leicht gefunden dadurch dass man H_1AF und $H_2B\Phi$ zieht.

Betrachten wir ferner eine Combination von zwei Systemen, $H_{\alpha,1}H_{\beta,1}$ und $H_{\alpha,2}H_{\beta,2}$ (Fig. 44). Die obige Bezeichnung der einzelnen Puncte soll hier beibehalten werden. F_1 und Φ_1 seien die Brennpuncte des ersten, F_2 und Φ_2 die des zweiten Systems; $H_{\alpha,1}$ und $H_{\beta,1}$ die Hauptpuncte des ersten, $H_{\alpha,2}$ und $H_{\beta,2}$ die des zweiten Systems. LC sei ein von vorne parallel mit der Axe in das erste System einfallender Strahl, welcher nach dem Durchgange durch dasselbe von C_1 aus gegen Φ_1 gerichtet ist. Man mache $DH_{\beta,2} = CH_{\alpha,1}$ und der parallel zur Axe rechts austretende Strahl DL_1 wird vor dem Durch-

gange durch das letzte System von F_2 aus gegen D_1 gerichtet sein. Der Durchschnittspunct h der beiden gebrochenen Strahlen ist derjenige Punct, dessen Bilder H_1 und H_2 sind. Um dieselben zu construiren, betrachte man jetzt h als den leuchtenden Punct und ziehe noch die beiden Strahlen hJ und hJ_1 parallel mit der optischen Axe.

Fig. 44.

Alsdann wird hJ nach F_1 und hJ_1 nach Φ_2 gebrochen. Die beiden nach vorne austretenden Strahlen CL und JF_1 divergiren aus H_1, die beiden nach hinten austretenden Strahlen aus H_2. Dies sind zwei Puncte der Hauptebenen $H_1 H_\alpha$ und $H_2 H_\beta$ des ganzen Systems.

Die Hauptbrennpuncte F und Φ werden durch Construction gefunden, indem man AA_1 parallel mit der Axe zieht und $H_1 A$ bis zum Durchschnitt F mit der Axe verlängert; auf der andern Seite $B_1 B$ parallel mit der Axe zieht und $H_2 B$ bis zum Durchschnitt Φ mit der Axe verlängert. Der Lichtstrahl LC, der aus einem unendlich entfernten Puncte der Axe von links her in das System eintritt, beschreibt den Weg $LC_1 B_1 B \Phi$, also ist Φ zweiter Hauptbrennpunct; der Lichtstrahl $L_1 D$, welcher gegen einen unendlich entfernten Punct der Axe gerichtet rechts aus dem Systeme austritt, beschreibt den Weg $FAA_1 D_1 L_1$; also ist F erster Hauptbrennpunct.

Ist eines der Systeme, z. B. das erste, eine einzelne brechende Fläche, so wird in der Construction nichts weiter geändert, als dass C und C_1, A und A_1, $H_{\alpha,1}$ und $H_{\beta,1}$, d. h. also die Hauptebenen des ersten Systems in die Scheitelebene der brechenden Fläche übergehen.

Errichtet man im ersten Brennpuncte F_1 des ersten Systems die Senkrechte $F_1 E_2$ gleich $A_1 H_{\beta,1}$, verbindet E_2 mit F und errichtet in F die Senkrechte FE, so ist nach dem Theorem von Neumann, dass $y = z + z_1$ sein muss, $E_1 E_2 F E$ ein Parallelogramm. Diese Eigenschaft kann zu einer andern Construction der Puncte H_α und F benutzt werden. Man ziehe $D_1 F_2 E_1$, mache $F_1 E_2 = A_1 H_{\beta,1}$ und ziehe $E_2 F$ parallel mit $E_1 A_1$, so ist F bestimmt. Ferner ziehe $A_1 A$ parallel mit $H_{\alpha,1} H_{\beta,1}$, FA bis zum Durchschnitte H_1 mit der

Verlängerung von $L_1 D_1$ und fälle $H_1 H_\alpha$ senkrecht zur optischen Axe, so ist H_α der erste Hauptpunct. In ähnlicher Weise lassen sich Φ und H_β construiren.

§ 33. **Die symptotischen Puncte von Listing.*)** In besonderen Fällen können Object- und Bildpunct in einem Puncte der Axe coincidiren. Listing hat gezeigt, dass es solcher Symptosen im Allgemeinen *zwei* gibt. Geht man aus von der Abscissengleichung

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

und bezeichnet das sogenannte Interstitium $H_\alpha H_\beta$ mit ε, so müssen im Falle der Symptose die Werthe von x_0 und x_1 die Bedingung

$$x_0 = \varepsilon + x_1$$

erfüllen, woraus, wenn man den dieser Bedingung genügenden Werth von x_0 mit v_0 bezeichnet, mit Hülfe der Abscissengleichung resultirt

$$v_0 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon + f + \varphi) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + f + \varphi)^2 - 4\,\varepsilon f}. \quad (103)$$

Für den Fall, dass $\varphi = -f$ ist, wird

$$v' = \tfrac{1}{2}\varepsilon \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon f}.$$

Im Allgemeinen existiren also je zwei Symptosen, und zwar, da $\varepsilon + f + \varphi = H_\alpha K_\beta$ ist, sind dieselben von dem mitten zwischen dem ersten Haupt- und zweiten Knotenpuncte liegenden Puncte in gleichem Abstande nach beiden Seiten hin gelegen.

Für die eine Symptose ist

$$v_0 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon + f + \varphi) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + f + \varphi)^2 - 4\,\varepsilon f}$$
$$v_1 = \tfrac{1}{2}(-\varepsilon + f + \varphi) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + f + \varphi)^2 - 4\,\varepsilon f},$$

für die andere

$$v_2 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon + f + \varphi) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + f + \varphi)^2 - 4\,\varepsilon f}$$
$$v_3 = \tfrac{1}{2}(-\varepsilon + f + \varphi) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + f + \varphi)^2 - 4\,\varepsilon f}.$$

Es ist dabei für die hintere Symptose (v_0, v_1) gemäss (10)

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{-\varphi\,[1 + \sqrt{1 - 4\,\varepsilon f : (\varepsilon + f + \varphi)^2}]}{f\,[-1 + \sqrt{1 + 4\,\varepsilon\varphi : (-\varepsilon + f + \varphi)^2}]},$$

für die vordere

$$\frac{Y_0'}{Y_1'} = \frac{-\varphi\,[1 - \sqrt{1 - 4\,\varepsilon f : (\varepsilon + f + \varphi)^2}]}{f\,[-1 - \sqrt{1 + 4\,\varepsilon\varphi : (-\varepsilon + f + \varphi)^2}]}.$$

Da die Wurzelgrössen sämmtlich gleich und bei positivem ε grösser als 1 sind, so ist

*) Pogg. Ann. Band 129. pg. 466.

$$\frac{Y_0}{Y_1} > \frac{-\varphi}{f}, \quad \frac{Y_0'}{Y_1'} < \frac{-\varphi}{f} \text{ und } > 1.$$

Für $\varepsilon = 0$ wird

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{-\varphi}{f}, \quad \frac{Y_0'}{Y_1'} = 1.$$

In letzterem Falle geht das System in eine einzige brechende Fläche über, die vordere Symptose liegt in der Scheitelebene, die hintere Symptose im Krümmungsmittelpuncte. Im ersteren Falle liegt die vordere Symptose vor dem ersten Hauptpuncte, die hintere hinter dem zweiten Knotenpuncte.

Man kann nun den Punct v_0 oder auch v_2 als Coordinatenanfangspunct wählen und erhält gemäss (4) wieder eine Gleichung von derselben Form, wie in $\mathfrak{x}$. Die neuen Abscissen seien t_0 und t_1 und es werde der Werth von v_0 kurz mit $m + \sqrt{n}$ bezeichnet, so ist

$$\frac{f}{m + \sqrt{n} + t_0} + \frac{\varphi}{m + \sqrt{n} - \varepsilon + t_1} = 1,$$

oder

$$f(m + \sqrt{n} - \varepsilon + t_1) = (m + \sqrt{n} + t_0)(m + \sqrt{n} - \varepsilon + t_1 - \varphi).$$

Wegen der Beziehung

$$(m + \sqrt{n})^2 - (\varepsilon + \varphi + f)(m + \sqrt{n}) + \varepsilon f = 0$$

erhält man schliesslich

$$\frac{-\frac{1}{2}(\varepsilon - f + \varphi) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + f + \varphi)^2 - 4\varepsilon f}}{t_0} + \frac{\frac{1}{2}(\varepsilon - f + \varphi) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + f + \varphi)^2 - 4\varepsilon f}}{t_1} = 1. \tag{104}$$

Wenn in einem Systeme von brechenden Flächen die Knotenpuncte nahe zusammenliegen, so lässt sich dasselbe auf eine einzige Fläche *reduciren*, wie dies z. B. beim menschlichen Auge der Fall ist. Das reducirte System unterscheidet sich aber von einer einzigen brechenden Fläche dadurch, dass in den symptotischen Puncten Object und Bild von ungleicher Grösse sind. Auch ist es nicht zulässig, die zweite Symptose zum Krümmungsmittelpunct der substituirten Fläche zu wählen, weil durch sie die Lichtstrahlen nicht ungebrochen weiter gehen.

Führt man die Reduction aus unter der Voraussetzung, dass die Hauptbrennpuncte dieselbe Lage behalten und dass die erste Symptose der Ort der brechenden Fläche ist, so ist der Krümmungsradius stets gleich dem gegenseitigen Abstande der Symptosen.

Experimentelle Bestimmung der Cardinalpuncte eines brechenden Systems. In § 20 am Schluss ist gezeigt worden, dass, wenn $x_0 y_0$ die Coordinaten eines Punctes P_0, $x_1 y_1$ die seines conjugirten Punctes P_1 bezeichnen, ferner $F \Phi H_0$ und H_1 die Abstände der beiden Hauptbrennpuncte und der beiden Hauptpuncte von dem § 34.

willkürlichen Coordinatenanfangspuncte O bedeuten, dann folgende Gleichungen gelten:

$$\frac{F-H_0}{x_0-H_0}+\frac{\Phi-H_1}{x_1-H_1}=1,$$

$$\frac{F-H_0}{x_0-H_0}y_0+\frac{\Phi-H_1}{x_1-H_1}y_1=0,$$

worin $F-H_0=f$, $\Phi-H_1=\varphi$ sind.

Bestimmt man experimentell z. B. mittels des Ophthalmometers von Helmholtz*) die Grössen der Bilder eines Objects in zwei verschiedenen Entfernungen vom System, so erhält man im Ganzen vier Gleichungen, nämlich ausser den beiden vorhergehenden noch die folgenden zwei:

$$\frac{F-H_0}{\xi_0-H_0}+\frac{\Phi-H_1}{\xi_1-H_1}=1,$$

$$\frac{F-H_0}{\xi_0-H_0}\eta_0+\frac{\Phi-H_1}{\xi_1-H_1}\eta_1=0.$$

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich die vier Unbekannten F, Φ, H_0 und H_1 berechnen. Ist das letzte Medium mit dem ersten von gleicher optischer Dichtigkeit, so ist $\varphi=-f$ oder

$$F-H_0=H_1-\Phi,$$

oder auch

$$F+\Phi=H_0+H_1.$$

In dem gedachten Falle kann man die letzte Gleichung in die übrigen vier einsetzen. Man erhält alsdann

$$\text{I.}\quad \frac{1}{x_0-H_0}-\frac{1}{x_1-H_1}=\frac{1}{F-H_0},$$

$$\text{II.}\quad \frac{y_0}{x_0-H_0}-\frac{y_1}{x_1-H_1}=0,$$

$$\text{III.}\quad \frac{1}{\xi_0-H_0}-\frac{1}{\xi_1-H_1}=\frac{1}{F-H_0},$$

$$\text{IV.}\quad \frac{\eta_0}{\xi_0-H_0}-\frac{\eta_1}{\xi_1-H_1}=0.$$

Substituirt man x_1-H_1 aus II in I und ξ_1-H_1 aus IV in III, so erhält man

$$H_0=\frac{x_0y_1(\eta_1-\eta_0)-\xi_0\eta_1(y_1-y_0)}{y_1(\eta_1-\eta_0)-\eta_1(y_1-y_0)} \tag{105}$$

$$H_1=\frac{x_1y_0(\eta_0-\eta_1)-\xi_1\eta_0(y_0-y_1)}{y_0(\eta_0-\eta_1)-\eta_0(y_0-y_1)} \tag{106}$$

$$F=\frac{\xi_0y_0\eta_1-x_0y_1\eta_0}{y_0\eta_1-y_1\eta_0}. \tag{107}$$

Ist φ von $-f$ verschieden, so bleiben für H_0 und H_1 die Formeln dieselben, nur wird

$$\Phi=\frac{x_1y_0\eta_1-\xi_1y_1\eta_0}{y_0\eta_1-y_1\eta_0}. \tag{108}$$

*) Man vergl. Physiol. Optik. § 10.

Hieraus folgt weiter

$$f = F - H_0 = \frac{y_1 \eta_1 (\xi_0 - x_0)}{y_0 \eta_1 - y_1 \eta_0} \qquad (109)$$

$$\varphi = \Phi - H_1 = \frac{y_0 \eta_0 (x_1 - \xi_1)}{y_0 \eta_1 - y_1 \eta_0}. \qquad (110)$$

Sind ausserdem die Krümmungshalbmesser der Vorder- und Hinterfläche durch Messung bestimmt, ebenso die Dicke, so lassen sich auch die Abstände α_1 und α_2 der Flächen von den Hauptpuncten sowie das totale Brechungsvermögen berechnen.

Zahlenbeispiel: Es sei gefunden

	I.	II.
die Brennweite $-f = \varphi = \ldots$	$45{,}144^{mm}$	$47{,}435^{mm}$
der Brechungsindex des umgebenden Mediums $n_0 = 1{,}3382$.		
die Dicke der Linse	4,2	4,314
der Krümmungsradius r_1	10,162	8,865
- - r_2	$-5{,}860$	$-5{,}889$.

Man findet nun das relative Brechungsvermögen n_1 der Linse bezüglich des umgebenden Mediums aus

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1},$$

worin zu substituiren ist

$$f_1 = \frac{-r_1}{n_1 - 1}, \quad f_2 = \frac{+n_1 r_2}{n_1 - 1}, \quad \varphi_1 = \frac{n_1 r_1}{n_1 - 1}.$$

Demgemäss ist

$$f = \frac{-r_1 r_2 n_1}{(n_1 - 1)\,[n_1 (r_1 + r_2) - (n_1 - 1)\, d_1]}.$$

Ordnet man nach n_1 und setzt die gegebenen Werthe ein, so erhält man für den

$$\text{Fall I:} \quad n_1^2 - \frac{8{,}941}{11{,}822}\, n_1 - \frac{4{,}2}{11{,}822} = 0; \; n_1 = 1{,}08405;$$

das totale Brechungsvermögen ist also gleich

$$n_0 n_1 = 1{,}4507.$$

$$\text{Im Falle II:} \quad n_1^2 - \frac{7{,}227}{10{,}440}\, n_1 - \frac{4{,}314}{10{,}440} = 0; \; n_1 = 1{,}0762.$$

Das totale Brechungsvermögen würde demnach betragen

$$n_0 n_1 = 1{,}4402.$$

Die Oerter der Hauptpuncte bezüglich des umgebenden Mediums sind gemäss (100)

$$\text{I.}\begin{cases}\alpha_1 = -\dfrac{f d_1}{r_2}\cdot\dfrac{n_1-1}{n_1} = 2{,}508 & (H.\ 2{,}258)^{*)}\\ \alpha_2 = -\dfrac{f d_1}{r_1}\cdot\dfrac{n_1-1}{n_1} = -1{,}447. & (H.\ 1{,}546)\end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases}\alpha_1 = 2{,}460 & (H.\ 2{,}810)\\ \alpha_2 = -1{,}634. & (H.\ 1{,}499).\end{cases}$$

Dieselben Zahlenbeispiele sind bereits in § 30 in anderer Weise benutzt worden.

§ 35. **Von den Gesetzen der Lichtbrechung in Linsen.** Wir werden nun weiter die Formeln betrachten, welche für den einfachsten Fall eines Systems von brechenden Flächen gelten. Wir setzen zwei Flächen von beliebiger Krümmung und Entfernung von einander voraus, welche drei Medien von einander trennen. Die Brennweiten der ersten Fläche seien f_1 und φ_1, die der zweiten f_2 und φ_2; ferner mögen die Krümmungsradien mit r_1 und r_2, die aufeinander folgenden relativen Brechungsindices mit n_1 und n_2, so wie der gegenseitige Abstand der Flächen mit d bezeichnet werden. Alsdann ist

$$f_1 = \frac{-r_1}{n_1-1},\quad \varphi_1 = \frac{n_1 r_1}{n_1-1},$$

$$f_2 = \frac{-r_2}{n_2-1},\quad \varphi_2 = \frac{n_2 r_2}{n_2-1}.$$

Die Hauptbrennweiten bestimmen sich aus (20) und (23)

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2-\varphi_1+d} = \frac{-r_1 r_2}{(n_1-1)r_2+n_1(n_2-1)r_1-d(n_1-1)(n_2-1)}$$

$$\varphi = \frac{-\varphi_1\varphi_2}{f_2-\varphi_1+d} = \frac{n_1 n_2 r_1 r_2}{(n_1-1)r_2+n_1(n_2-1)r_1-d(n_1-1)(n_2-1)},$$

die Entfernungen der Hauptpuncte von den Flächen aus (21) und (24):

$$-\alpha_1 = \frac{f_1 d}{f_2-\varphi_1+d} = \frac{(n_2-1)r_1 d}{(n_1-1)r_2+n_1(n_2-1)r_1-d(n_1-1)(n_2-1)}$$

$$-\alpha_2 = \frac{\varphi_2 d}{f_2-\varphi_1+d} = \frac{-n_2(n_1-1)r_2 d}{(n_1-1)r_2+n_1(n_2-1)r_1-d(n_1-1)(n_2-1)}.$$

Die Entfernung der Hauptpuncte von einander oder des Interstitium ist

$$\varepsilon = d+\alpha_1-\alpha_2 = d\,\frac{(n_1-1)(n_2-1)(r_1-r_2-d)}{(n_1-1)r_2+n_1(n_2-1)r_1-d(n_1-1)(n_2-1)}.$$

Für $d = 0$ ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \varepsilon = 0$ und

$$f = \frac{-r_1 r_2}{(n_1-1)r_2+n_1(n_2-1)r_1},$$

$$\varphi = \frac{n_1 n_2 r_1 r_2}{(n_1-1)r_2+n_1(n_2-1)r_1}.$$

---

*) Helmholtz, physiol. Optik § 10 findet die nebenstehenden sehr abweichenden Resultate.

Setzen wir dazu $r_2 = r_1$, so erhalten wir eine unendlich dünne durch concentrische Kugelflächen begrenzte Schicht und es wird

$$f = \frac{-r_1}{n_2 - 1}, \quad \varphi = \frac{n_2 r_1}{n_2 - 1}.$$

Dies Resultat ist von n_1 unabhängig und wir dürfen n_1 also beliebig gross annehmen, ohne die Brechung der Strahlen in dieser unendlich dünnen Schicht zu ändern.

In denjenigen Fällen, wo das erste und letzte Mittel von gleicher Beschaffenheit sind, z. B. atmosphärische Luft, wo ferner beide eine geringere optische Dichtigkeit haben als das zweite, nennt man diese Systeme *einfache Linsen.* Ist die Dicke beträchtlich, so nennt man sie *Cylinderlinsen.* Wir werden im Folgenden immer annehmen, dass die Dicke nicht vernachlässigt werden dürfe, weil dadurch die Einfachheit der Formeln wenig beeinträchtigt, die Genauigkeit derselben aber wesentlich gesteigert wird.

Für Linsen ist nun $\varphi = -f$, $n_2 = 1 : n_1$ und die *erste* Hauptbrennweite

$$f = \frac{-r_1 r_2 n_1}{(n_1 - 1)\,[n_1 (r_2 - r_1) + (n_1 - 1)\,d]},$$

die zweite

$$\varphi = \frac{r_1 r_2 n_1}{(n_1 - 1)\,[n_1 (r_2 - r_1) + (n_1 - 1)\,d]}. \quad (111)$$

Unter der Brennweite einer Linse wird im Allgemeinen immer die letztere verstanden. Eine Linse von positiver Brennweite ist eine solche, bei welcher die zweite Brennweite positiv ist.

Die Entfernungen der Knotenpuncte, welche in dem angenommenen Falle stets mit den Hauptpuncten coincidiren, von den Scheitelflächen sind die negativen Werthe von α_1 und α_2, also

$$-\alpha_1 = \frac{-r_1 d}{n_1 (r_2 - r_1) + (n_1 - 1)\,d}, \quad (112)$$

$$-\alpha_2 = \frac{-r_2 d}{n_1 (r_2 - r_1) + (n_1 - 1)\,d}. \quad (113)$$

Dieselben sind positiv, wenn beide zur Rechten der zugehörigen Scheitelpuncte liegen. Sind die Haupt- oder Knotenpuncte innerhalb des Systems gelegen, so ist der erste Abstand positiv, der zweite negativ; dagegen haben natürlicher Weise die Abstände der Scheitelpuncte von den Hauptpuncten das entgegengesetzte Vorzeichen.

Das Interstitium ist nun weiter gleich

$$\varepsilon = d\,\frac{(n_1 - 1)\,(d + r_2 - r_1)}{n_1 (r_2 - r_1) + (n_1 - 1)\,d}. \quad (114)$$

Im vorigen Paragraphen ist gezeigt worden, dass für unsern Fall

$$F + \Phi = H_0 + H_1$$

sei. Die Dimension $\frac{1}{2}(H_0 + H_1)$ ist demnach die Abscisse desjenigen

Punctes, welcher in der Mitte der beiden Hauptpuncte liegt. Ebenso ergibt sich $\frac{1}{2}(F + \Phi)$ als die Abscisse desjenigen Punctes, welcher sich in der Mitte der beiden Hauptbrennpuncte befindet. Diese mittleren Puncte fallen offenbar zusammen. Bei Linsen liegen demnach die Hauptpuncte symmetrisch zu den Brennpuncten. Da die beiden Knotenpuncte jederzeit symmetrisch zu den Hauptpuncten in Bezug auf die Brennpuncte liegen, so fallen sie bei den Linsen auch aus diesem Grunde mit den Hauptpuncten zusammen. Im Ganzen werden, wenn die beiden Brennpuncte fest sind, vier verschiedene Lagen der Haupt- und Knotenpuncte möglich sein, nämlich

$$F \ldots\ldots H_\alpha \ldots\ldots H_\beta \ldots\ldots \Phi$$
$$F \ldots\ldots H_\beta \ldots\ldots H_\alpha \ldots\ldots \Phi$$
$$H_\alpha \ldots\ldots F \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Phi \ldots\ldots H_\beta$$
$$H_\beta \ldots\ldots F \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Phi \ldots\ldots H_\alpha.$$

Es gibt nun noch einen andern festen Punct innerhalb der Linse, dessen Kenntniss von Wichtigkeit ist und welchen man ihr *optisches Centrum* nennt. Desselben ist bereits in § 14 unter der Bezeichnung h Erwähnung geschehen; desgleichen in § 31. Es ist dies derjenige Punct, von dem die beiden Hauptpuncte die Bilder sind. Gemäss Formel (101) wird das Verhältniss seiner Abstände von den Scheitelpuncten S_1 und S_2 ausgedrückt durch

$$x_1 : x_2 = \varphi_1 : f_2 = r_1 : r_2 .$$

Darnach verhalten sich die Entfernungen des optischen Centrums von den beiden Flächen zu einander, wie die Radien derselben. Da aber auch (99)

$$\alpha_1 : \alpha_2 = r_1 : r_2,$$

so verhalten sie sich auch wie ihre Abstände von den Hauptpuncten oder wie die Abstände der Hauptpuncte von den Flächen. Es ist nämlich

$$x_1 : x_2 = r_1 : r_2 = \alpha_1 : \alpha_2 = (x_1 - \alpha_1) : (x_2 - \alpha_2). \qquad (115)$$

Wenn in einem speciellen Falle $r_2 = - r_1$, die Linse also gleichseitig ist, so liegt das optische Centrum in der Mitte der Linsenaxe. Wenn die Hauptpuncte innerhalb der Linse liegen, so liegt das optische Centrum zwischen ihnen.

Da in jedem dioptrischen Systeme die Lage und Grösse der Bilder allein von der Lage der Haupt- und Brennpuncte abhängig sind, so wird es immer möglich sein, durch eine entsprechende Aenderung der Linsendicke d, der Krümmungsradien der beiden Flächen, sowie des Brechungsindex zwei Linsen für einander zu substituiren. Nehmen wir an, dass das äussere Medium Luft bleibe, so ist in Berücksichtigung der Gleichung

$$F + \Phi = H_0 + H_1$$

in beiden Systemen nur f und das Interstitium ε beizubehalten. Die Gleichungen (111) und (114) enthalten aber vier Bestimmungsgrössen r_1, r_2, n_1 und d. Man kann also bei der Substitution zweier Linsen für einander noch zwei andere beliebige Bedingungsgleichungen aufstellen.

Von den verschiedenen Arten der Linsen, der Lage ihrer Cardinalpuncte und von ihrer Wirkungsart. Man kann nach der Richtung der Krümmungsradien der Vorder- und Hinterfläche im Ganzen *sechs* Arten von sphärischen Linsen unterscheiden, und zwar sind dieselben: § 36.

1) *biconvex*; (Fig. 45a) r_1 ist positiv, r_2 negativ;
2) *planconvex*; (Fig. 45b) r_1 ist positiv, r_2 ist ∞; oder r_1 ist ∞ und r_2 negativ;
3) *concavconvex*; (Fig. 45c) r_1 und r_2 sind beide positiv, $r_2 > r_1$; oder r_1 und r_2 negativ, $r_2 < r_1$;
4) *biconcav*; (Fig. 45d) r_1 ist negativ, r_2 positiv;
5) *planconcav*; (Fig. 45e) r_1 ist negativ, r_2 gleich ∞; oder r_1 gleich ∞ und r_2 positiv;
6) *convexconcav*; (Fig. 45f) r_1 und r_2 sind negativ, $r_1 < r_2$; oder r_1 und r_2 positiv, $r_1 > r_2$.

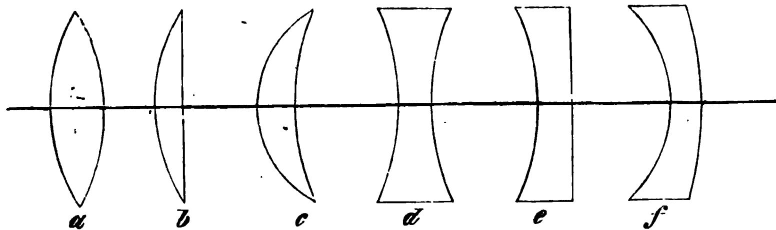


Fig. 45.

Wir wollen die Lage der Fundamentalpuncte bei den verschiedenen Linsenarten genauer untersuchen.

1) *Die biconvexen Linsen.* (Fig. 46.) Die allgemeine Gleichung für Systeme ist

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1.$$

Ist $x_1 = \infty$, so findet man die erste Brennweite $x_0 = f$; ist $x_0 = \infty$, so ist $x_1 = \varphi$ die zweite. Da das äussere Medium Luft ist, so haben wir $\varphi = -f$ zu setzen; die Formel der Abscissen ist demnach für Linsen

$$\frac{f}{x_0} - \frac{f}{x_1} = 1 \text{ oder } \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f},$$

und wenn wir die positive zweite Brennweite einführen,

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{\varphi}. \qquad (116).$$

In dem vorliegenden Falle ist nun r_2 negativ, also gleich $-\varrho_2$; hierdurch nehmen die Gleichungen für die Oerter der Cardinalpuncte folgende Formen an:

$$-f = \varphi = \frac{r_1 \varrho_2 n_1}{(n_1 - 1)[n_1(r_1 + \varrho_2) - (n_1 - 1)d]}, \qquad (116)$$

$$-\alpha_1 = \frac{r_1 d}{n_1(r_1 + \varrho_2) - (n_1 - 1)d}, \qquad (117)$$

$$-\alpha_2 = \frac{-\varrho_2 d}{n_1(r_1 + \varrho_2) - (n_1 - 1)d}, \qquad (118)$$

$$\varepsilon = d\,\frac{(n_1 - 1)(r_1 + \varrho_2 - d)}{n_1(r_1 + \varrho_2) - (n_1 - 1)d}. \qquad (119)$$

Der Abstand der Krümmungsmittelpuncte C_1 und C_2 ist

$$C_1 C_2 = d - (r_1 + \varrho_2).$$

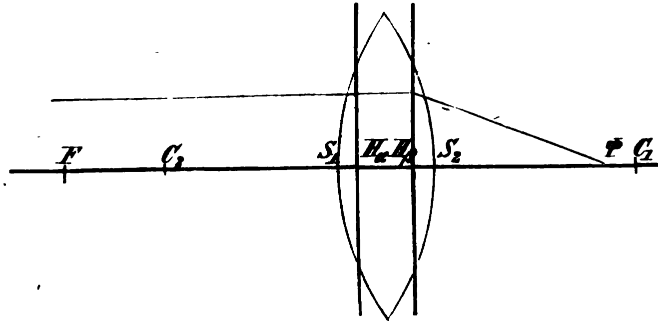


Fig. 46.

Ist d sehr klein gegen die Krümmungsradien, so kann man setzen:

$$\varphi = \frac{r_1 \varrho_2}{(n_1 - 1)(r_1 + \varrho_2)} \text{ (positiv)}$$

$$\alpha_1 = \frac{-r_1 d}{n_1(r_1 + \varrho_2)} \text{ (negativ)}$$

$$\alpha_2 = \frac{\varrho_2 d}{n_1(r_1 + \varrho_2)} \text{ (positiv)}$$

$$\varepsilon = \frac{n_1 - 1}{n_1} d \text{ (positiv)}.$$

In dem vorliegenden Falle ist also die Brennweite positiv, der erste Hauptpunct liegt rechts von der Vorderfläche, der zweite links von der Hinterfläche, und der zweite Hauptpunct liegt hinter dem ersten. Da ferner $-\alpha_1 < d$, $\alpha_2 < d$ ist, so liegen die beiden Hauptpuncte innerhalb der Linse (Fig. 46). Auch liegen die Brennpuncte ausserhalb der Linse, weil absolut genommen $f > \alpha_1$ und $\varphi > \alpha_2$ ist.

Ist d verhältnissmässig gross, so werden die Linsen sogenannte Cylinderlinsen, wobei sehr abweichende Verhältnisse in der Lage der

Cardinalpuncte eintreten können. Dabei kommt es hauptsächlich auf den Werth des Divisors $n_1(r_1+\varrho_2)-(n_1-1)d$ an; es lassen sich im Ganzen drei Fälle unterscheiden, nämlich:

$$\text{(a)}\quad n_1(r_1+\varrho_2)-(n_1-1)d>0 \text{ oder } r_1+\varrho_2>d\frac{n_1-1}{n_1},$$

$$\text{(b)}\quad n_1(r_1+\varrho_2)-(n_1-1)d=0 \quad - \quad r_1+\varrho_2=d\frac{n_1-1}{n_1},$$

$$\text{(c)}\quad n_1(r_1+\varrho_2)-(n_1-1)d<0 \quad - \quad r_1+\varrho_2<d\frac{n_1-1}{n_1}.$$

Wir wollen diese Fälle specialisiren.

$$\text{a)}\quad r_1+\varrho_2>d\frac{n_1-1}{n_1}.$$

Hierher gehören die dünnen Linsen; ausserdem aber auch folgende Fälle:

$$\alpha)\quad d=\frac{n_1 r_1}{n_1-1} \text{ oder } n_1 r_1-(n_1-1)d=0.$$

Es ist dann

$$f=-\frac{r_1}{n_1-1},\quad \alpha_1=-\frac{r_1\cdot r_1}{(n_1-1)\varrho_2},\quad \alpha_2=\frac{r_1}{n_1-1}$$

$$\varepsilon=\frac{r_1}{\varrho_2}\left(\varrho_2-\frac{r_1}{n_1-1}\right).$$

Ist dabei $\frac{r_1}{n_1-1}<\varrho_2$ z. B. $\frac{r_1}{n_1-1}=\frac{1}{2}\varrho_2$, so ist $\varrho_2>r_1$ und

$$\varphi=\tfrac{1}{2}\varrho_2,\quad \alpha_1=-\tfrac{1}{2}r_1,\quad \alpha_2=\tfrac{1}{2}\varrho_2,\quad \varepsilon=\tfrac{1}{2}r_1;$$

d. h. der erste Brennpunct liegt vor S_1, der zweite in S_2 und der zweite Hauptpunct liegt hinter dem ersten, beide Hauptpuncte innerhalb der Linse und der erste Hauptpunct in der Mitte zwischen S_1 und H_β.

Ist dagegen $\frac{r_1}{n_1-1}=\varrho_2$, so wird

$$\varphi=\varrho_2,\quad \alpha_1=-r_1,\quad \alpha_2=\varrho_2,\quad \varepsilon=0.$$

Die beiden Hauptpuncte fallen zusammen innerhalb der Linse, weil α_1 negativ ist und $d=n_1\varrho_2>r_1$. Der erste Brennpunct F liegt vor S_1 und der zweite Φ in S_2.

Ist endlich $r_1=\varrho_2$, so wird

$$\varphi=\frac{r_1}{n_1-1},\quad \alpha_1=-\frac{r_1}{n_1-1},\quad \alpha_2=\frac{r_1}{n_1-1},\quad \varepsilon=\frac{(n_1-2)r_1}{n_1-1}.$$

Der erste Brennpunct liegt jetzt in S_1 und der zweite Hauptpunct vor dem ersten, weil vorausgesetzt wird, dass stets $2>n_1>1$ und demnach das Interstitium ε negativ ist.

Der zweite Brennpunct kann nun noch weiter nach vorne rücken. Nehmen wir an

$$\beta)\quad n_1(r_1+\varrho_2)-(n_1-1)d=\varrho_2.$$

In diesem Falle ist

$$\varphi = \frac{n_1 r_1}{n_1 - 1}, \quad \alpha_1 = -\frac{r_1}{\varrho_2} d, \quad \alpha_2 = d, \quad \varepsilon = -\frac{r_1}{\varrho_2} d.$$

Der zweite Hauptpunct liegt vor dem ersten und zwar in S_1 und der zweite Hauptbrennpunct Φ im Krümmungsmittelpuncte der zweiten Fläche, also innerhalb der Linse. Φ kann aber auch sogar vor der ersten Fläche liegen.

γ) Es sei $r_1 + \varrho_2 = d$. Alsdann ist

$$\varphi = \frac{n_1 r_1 \varrho_2}{(n_1 - 1)(r_1 + \varrho_2)}, \quad \alpha_1 = -r_1, \quad \alpha_2 = \varrho_2, \quad \varepsilon = 0.$$

Die Hauptebenen fallen mit dem gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpuncte zusammen; *ein* Brennpunct ist innerhalb der Linse, der andere ausserhalb. Ist nämlich $f > +\alpha_1$, so muss $\varrho_2 > (n_1 - 1) r_1$ sein. Soll zugleich $\varphi > \alpha_2$ sein, so muss $\varrho_2 < r_1 : (n_1 - 1)$ sein, was zugleich nicht möglich ist.

b) $d = \frac{n_1}{n_1 - 1}(r_1 + \varrho_2)$ oder $n_1 (r_1 + \varrho_2) - (n_1 - 1) d = 0$.

In dem angenommenen Falle ist d noch grösser wie zuvor. Die Formeln (116) bis (119) ergeben nun folgende dioptrische Constanten:

$$-f = \varphi = \pm \infty, \quad \alpha_1 = \mp \infty, \quad \alpha_2 = \pm \infty, \quad \varepsilon = \infty.$$

Der zweite Brennpunct der Vorderfläche coincidirt mit dem ersten Brennpunct der Hinterfläche. Parallel mit der Axe eintretende Strahlen kreuzen sich in diesem Puncte und treten parallel wieder aus.

c) $d > \frac{n_1}{n_1 - 1}(r_1 + \varrho_2)$ oder $n_1 (r_1 + \varrho_2) - (n_1 - 1) d < 0$.

Man erhält unter dieser Voraussetzung eine positive erste, eine negative zweite Brennweite, α_1 ist positiv, α_2 negativ und weil

$$d - r_1 - \varrho_2 > \frac{d}{n_1}, \text{ also auch } d - r_1 - \varrho_2 > 0,$$

das Interstitium ε positiv. Demnach liegen die Hauptpuncte ausserhalb der Linse und der erste Hauptpunct vor dem zweiten. Es sei beispielsweise:

$$n_1 (r_1 + \varrho_2) - (n_1 - 1) d = -r_1, \text{ also } d - r_1 - \varrho_2 = \frac{r_1 + d}{n_1}.$$

In diesem speciellen Falle ist

die erste Brennweite $f = \frac{n_1}{n_1 - 1} \varrho_2$ (positiv),

- zweite - $\varphi = -\frac{n_1}{n_1 - 1} \varrho_2$ (negativ),

$$\alpha_1 = d, \quad \alpha_2 = -\frac{\varrho_2}{r_1} d, \quad \varepsilon = d \frac{(n_1 - 1)(r_1 + d)}{n_1 r_1}.$$

Der erste Hauptpunct liegt also vor der Vorderfläche, der zweite hinter der Hinterfläche der Linse; das Interstitium ist positiv. Da ferner

$$\frac{n_1}{n_1 - 1}(r_1 + \varrho_2) < d,$$

so ergibt sich noch

$$\frac{n_1}{n_1 - 1}\varrho_2 < d - \frac{n_1 r_1}{n_1 - 1} < d.$$

Demzufolge ist f kleiner als α_1 und es liegt F zwischen H_α und S_1, d. i. hinter dem ersten Hauptpuncte und vor der Vorderfläche der Linse.

2) *Die planconvexen Linsen* (Fig. 47). Diese Linsen sind als Grenzfall der biconvexen zu betrachten. Angenommen r_1 sei positiv, r_2 gleich ∞, so findet man

$$f = -\frac{r_1}{n_1 - 1} = f_1, \quad \varphi = \frac{r_1}{n_1 - 1};$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{d}{n_1}, \quad \varepsilon = \frac{n_1 - 1}{n_1} d.$$

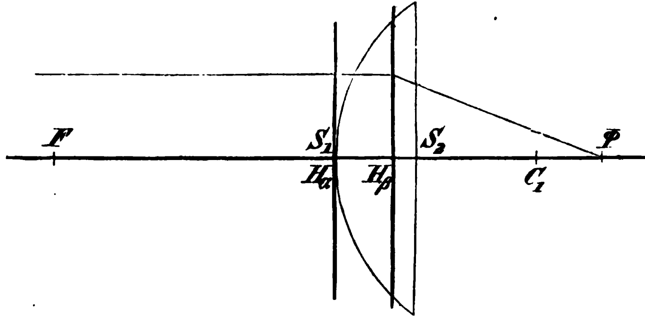


Fig. 47.

Der erste Hauptpunct fällt in die gekrümmte Vorderfläche und die Brennweite ist gleich der ersten Brennweite der Vorderfläche. Während bei biconvexen Linsen α_1 und α_2 gleichzeitig gleich Null sind, also die Hauptebenen gleichzeitig in den brechenden Flächen liegen, nimmt der eine Hauptpunct von der zugehörigen Fläche mit unendlich grossem Radius Distanz und nähert sich ihr bis zur Coincidenz bei abnehmender Dicke der Linse oder bei zunehmendem Brechungsvermögen.

3) *Die concavconvexen Linsen* (Fig. 48). Wir nehmen an, es seien r_1 und r_2 positiv, $r_2 > r_1$. Gemäss (111) bis (114) ist alsdann

$$\varphi = \frac{r_1 r_2 n_1}{(n_1 - 1)\,[n_1 (r_2 - r_1) + (n_1 - 1)\,d]}, \tag{120}$$

$$\alpha_1 = \frac{r_1 d}{n_1 (r_2 - r_1) + (n_1 - 1)\,d}, \tag{121}$$

$$\alpha_2 = \frac{r_2 d}{n_1 (r_2 - r_1) + (n_1 - 1)\,d}, \tag{122}$$

$$\varepsilon = d\,\frac{(n_1 - 1)\,(d + r_2 - r_1)}{n_1 (r_2 - r_1) + (n_1 - 1)\,d}. \tag{123}$$

Die Brennweite ist positiv, so lange $r_2 > r_1$ oder $n_1(r_2 - r_1 + d) > d$ ist. Ist aber $n_1(r_2 - r_1 + d) = d$, so muss $r_2 = r_1$ und $d = 0$ sein.

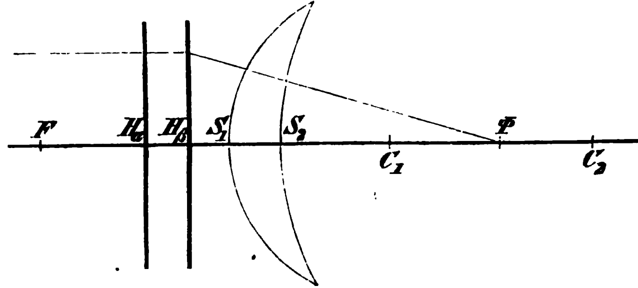


Fig. 48.

In diesem Falle ist die Linse unendlich dünn, φ gleich ∞, ebenso α_1, α_2 und ε.

Der Ausdruck $d + r_2 - r_1$ ist immer dem gegenseitigen Abstande $C_1 C_2$ der beiden Krümmungsmittelpuncte gleich. Da wir angenommen haben, dass $r_2 > r_1$ sei, so ist ε oder $H_\alpha H_\beta$ positiv; der erste Hauptpunct liegt vor dem zweiten. Die Abstände α_1 und α_2 der beiden Scheitelpuncte von den zugehörigen Hauptpuncten sind positiv und $\alpha_2 > \alpha_1$. Das Interstitium ist also kleiner als die Linsendicke.

4) *Die biconcaven Linsen* (Fig. 49). Bei diesen Linsen ist r_1

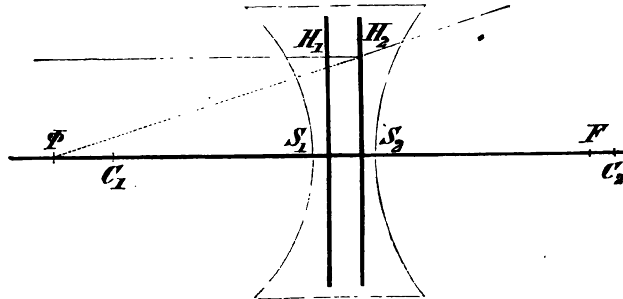


Fig. 49.

negativ, also gleich $-\varrho_1$, und r_2 positiv. Die Gleichungen der Oerter der Fundamentalpuncte nehmen demgemäss folgende Formen an:

$$\varphi = \frac{-\varrho_1 r_2 n_1}{(n_1 - 1)\,[n_1(\varrho_1 + r_2) + (n_1 - 1)\,d]}, \qquad (124)$$

$$\alpha_1 = \frac{-\varrho_1 d}{n_1(\varrho_1 + r_2) + (n_1 - 1)\,d}, \qquad (125)$$

$$\alpha_2 = \frac{r_2 d}{n_1(\varrho_1 + r_2) + (n_1 - 1)\,d}, \qquad (126)$$

$$\varepsilon = d\,\frac{(n_1 - 1)\,(d + \varrho_1 + r_2)}{n_1(\varrho_1 + r_2) + (n_1 - 1)\,d}. \qquad (127)$$

Da α_1 und α_2 absolut genommen kleiner als d sind, so liegen die Hauptpuncte stets innerhalb der Linse und der erste vor dem zweiten. Der erste Brennpunct kann hinter, in und vor der Hinterfläche liegen. Ist z. B. $n_1 \varrho_1 \leqq (n_1 - 1)\, d$, so liegt F hinter S_2; ist dagegen

$$(n_1 - 1)(d + \varrho_1 + r_2)\, d + r_2 d < \frac{\varrho_1 r_2 n_1}{n_1 - 1},$$

so liegt F vor S_2. Die Brennweite dieser Linsen ist stets negativ, der Brennpunct also virtuell.

5) *Die planconcaven Linsen* (Fig. 50). Es sei r_1 negativ und gleich $-\varrho_1$, $r_2 = \infty$. Die planconcaven Linsen sind also als Grenzfall der biconcaven zu betrachten. Die dioptrischen Constanten sind

$$f = \frac{\varrho_1}{n_1 - 1} = f_1, \quad \varphi = \frac{-\varrho_1}{n_1 - 1};$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{d}{n_1}, \quad \varepsilon = \frac{n_1 - 1}{n_1}\, d.$$

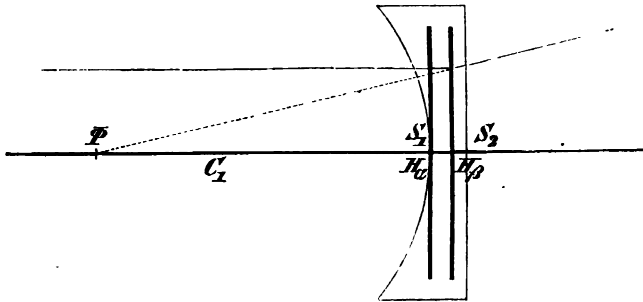


Fig. 50.

Der erste Hauptpunct fällt in die gekrümmte Fläche. Während bei biconcaven Linsen α_1 und α_2 gleichzeitig Null werden, also die Hauptpuncte gleichzeitig in den brechenden Flächen liegen, nimmt hier der eine Hauptpunct von der zugehörigen ebenen Fläche Distanz und nähert sich ihr bis zur Coincidenz bei abnehmender Linsendicke.

6) *Die convexconcaven Linsen* (Fig. 51 a, b, c, d). Wir setzen jetzt voraus, es sei r_1 negativ und gleich $-\varrho_1$, r_2 ebenfalls negativ und gleich $-\varrho_2$; $\varrho_2 > \varrho_1$. Die dioptrischen Elemente sind nun

$$\varphi = \frac{-\varrho_1 \varrho_2 n_1}{(n_1 - 1)\,[n_1(\varrho_2 - \varrho_1) - (n_1 - 1)\, d]} \tag{128}$$

$$\alpha_1 = \frac{\varrho_1 d}{n_1(\varrho_2 - \varrho_1) - (n_1 - 1)\, d}, \tag{129}$$

$$\alpha_2 = \frac{\varrho_2 d}{n_1(\varrho_2 - \varrho_1) - (n_1 - 1)\, d}, \tag{130}$$

$$\varepsilon = d\, \frac{(n_1 - 1)(\varrho_2 - \varrho_1 - d)}{n_1(\varrho_2 - \varrho_1) - (n_1 - 1)\, d}. \tag{131}$$

Es sind bei diesen Linsen drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Der Abstand $C_1 C_2$ der Krümmungsmittelpuncte, also der Ausdruck $d - r_1 + r_2 = d - (\varrho_2 - \varrho_1)$ ist positiv, wenn C_1 vor C_2, negativ,

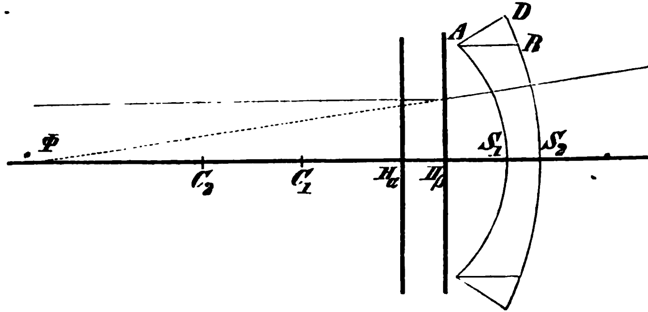


Fig. 51 a.

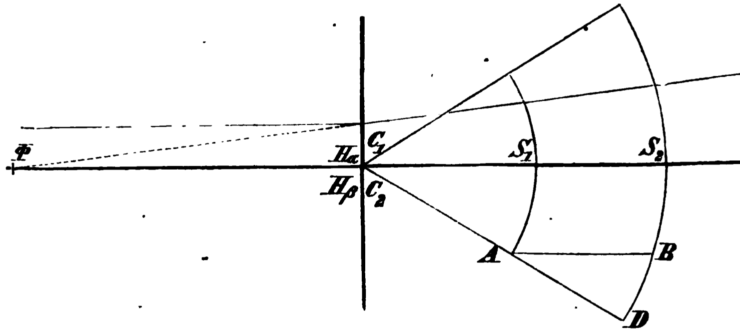


Fig. 51 b.

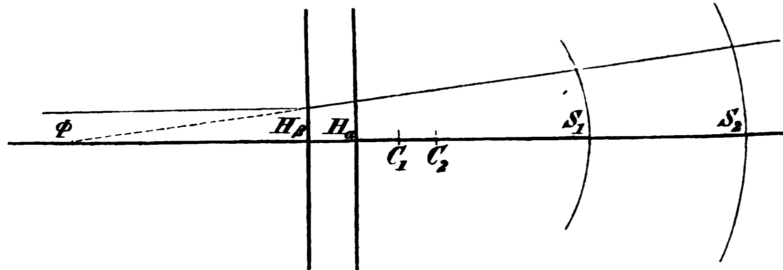


Fig. 51 c.

wenn C_1 hinter C_2 liegt. Wir unterscheiden die drei Fälle nun nach dem Vorzeichen des Divisors

$$n_1 (\varrho_2 - \varrho_1) - (n_1 - 1) d = d - n_1 [d - (\varrho_2 - \varrho_1)] \, .$$

a) $(\varrho_2 - \varrho_1) > \frac{n_1 - 1}{n_1} d$ oder $d - (\varrho_2 - \varrho_1) < \frac{d}{n_1}$. Unter dieser Voraussetzung ist die Brennweite φ negativ, die Abstände α_1 und α_2 positiv und $\alpha_2 > \alpha_1$. Endlich ist

$$\begin{aligned} &\varepsilon \text{ positiv, wenn } d < \varrho_2 - \varrho_1, \\ &\quad\text{Null,} \quad „ \quad d = \varrho_2 - \varrho_1, \\ &\text{negativ,} \quad „ \quad d > \varrho_2 - \varrho_1. \end{aligned}$$

Diese drei Fälle von a) sind veranschaulicht in Fig. 51 a b c.

b) $\varrho_2 - \varrho_1 = \frac{n_1 - 1}{n_1} d$ oder $d - (\varrho_2 - \varrho_1) = \frac{d}{n_1}$. Man findet aus den vorangeschickten Formeln für die dioptrischen Elemente dieser Linsen

$$\varphi = \mp \infty, \quad \alpha_1 = \pm \infty, \quad \alpha_2 = \pm \infty, \quad \varepsilon = \mp \infty.$$

Es ist nämlich der Voraussetzung gemäss $d > \varrho_2 - \varrho_1$.

c) $\varrho_2 - \varrho_1 < \frac{n_1 - 1}{n_1} d$. In diesem Falle ist nun die Brennweite φ positiv, die Abstände α_1 und α_2 negativ, sowie $-\alpha_2 > -\alpha_1$. Das Interstitium ε ist positiv, weil $d > \varrho_2 - \varrho_1$. Ausserdem ist $\varepsilon > d$, weil $\varepsilon = d - \alpha_2 + \alpha_1$ ist. Dieser Fall ist in Fig. 51 d dargestellt. In einem speciellen Falle kann $\varrho_2 = \varrho_1$ sein. Dann ist die Brennweite

$$\varphi = \frac{\varrho_1 \varrho_2 n_1}{(n_1 - 1)^2 d}; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{\varrho_1}{n_1 - 1}, \quad \varepsilon = d.$$

Diese Arten von Linsen gehen in die Gattung der concavconvexen Linsen über, welche am Rande dünner als in der Mitte sind. In Fig. 51 d ist in der That $AB = S_1 S_2$, dagegen die wahre Dicke AD der Linse am Rande kleiner als $S_1 S_2$.

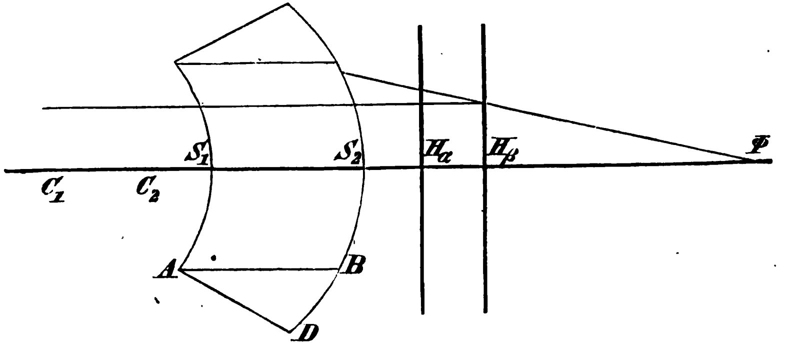


Fig. 51 d.

In Fig. 51 a bleiben sowol AB als AD grösser als $S_1 S_2$. In Fig. 51 b ist $AB > S_1 S_2$ und $AD = S_1 S_2$. Der Fall 6) b) steht mitten inne und es entscheidet überall da, wo sich nicht angeben lässt, ob die Linse nach dem Rande hin dicker oder dünner wird, nur noch die Ungleichung

$$\varrho_2 - \varrho_1 \gtrless \frac{n_1 - 1}{n_1} d.$$

§ 37. **Von der Lage und Grösse der Bilder von Objecten bei den Linsen.** Was die Bilder von Objecten betrifft, so nehmen bei Linsen die Abscissen- und Ordinatengleichungen der conjugirten Punctsysteme folgende Formen an:

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{\varphi},$$

$$Y_0 : Y_1 = (f - x_0) : f = f : (f + x_1) = x_0 : x_1.$$

Nimmt man statt zweier Coordinatenanfangspuncte nur *einen* an, so muss man von (104) ausgehen.

Man kann nun sämmtliche Linsen classificiren nach dem Vorzeichen ihrer zweiten Hauptbrennweite. Ist diese *positiv*, so heissen sie wegen ihrer Eigenschaft, die Divergenz eintretender Lichtstrahlen zu vermindern, *Sammellinsen* oder *Collectivlinsen;* ist sie *negativ*, so heissen sie *Zerstreuungs-* oder *Dispersivlinsen.*

I. *Die Collectivlinsen.* Die vorangestellten Gleichungen lassen nun sehr leicht die Lage und Grösse der Bilder, wie sie von Linsen entworfen werden, übersichtlich erkennen. Was die Construction derselben betrifft, so verweisen wir in dieser Hinsicht auf die früher beschriebenen Methoden.

Wenn bei den Collectivlinsen der Abstand x_0 des Objects von dem ersten Hauptpuncte grösser ist als die Hauptbrennweite, so ist der Abstand des Bildes vom zweiten Hauptpuncte stets positiv. Für ein unendlich entferntes Object von den Coordinaten $x_0\, Y_0$ liegt das Bild im zweiten Focus hinter der Linse. Das Bild ist unendlich klein. Nähert sich das Object der Linse bis in endliche Entfernungen, so wird das Bild grösser. Dasselbe entfernt sich zugleich von der Linse und wird unendlich gross und unendlich weit entfernt für $x_0 = f$, d. h. also für den Fall, dass die senkrechte zur optischen Axe gedachte Objectebene in die erste Brennebene eingetreten ist. Ist nämlich $x_0 = f$, so ist

$$Y_1 : Y_0 = f : (f - f) = \infty.$$

Innerhalb der gedachten Gränzen ist das Bild zugleich ein umgekehrtes; denn f ist negativ und $x_0 - f$ positiv. Rückt das Object aus der ersten Brennebene weiter gegen die Linse vor, so wird $x_0 - f$ negativ, folglich auch x_1. Es ist nämlich $x_1 = f x_0\,(x_0 - f)$. Das Bild ist virtuell, liegt vor dem Object, ist grösser als dieses und von gleicher Richtung.

Bei fortgesetztem Vorrücken des Objects gegen die erste Hauptebene nähern sich Object und Bild bis zur Coincidenz in der vordern Symptose, die vor dem ersten Hauptpuncte stattfindet; jedoch bleibt das Bild noch grösser als das Object selbst.

Geht das Object in die erste Hauptebene über, so liegt das congruente und homothetische Bild in der zweiten. Wenn die erste

Hauptebene innerhalb der Linse liegt, so ist der leuchtende Punct (Object) nur so lange reell, als derselbe vor der Vorderfläche liegt. Convergiren die in die Linse eintretenden Strahlen gegen einen Punct innerhalb der Linse, so ist das Object als virtuell zu betrachten.

Hinter dem zweiten Hauptpuncte findet eine abermalige Symptose Statt, wobei das Bild kleiner ist als das Object. Es ist nämlich in diesem Falle x_0 positiv und ebenso x_1; aber $x_0 > x_1$ und also wegen

$$Y_0 : Y_1 = x_0 : x_1$$

auch $Y_0 > Y_1$. Wird endlich $x_0 = -\infty$, so wird $x_1 = \varphi = -f$ und $Y_1 = 0$. Das Bild liegt wieder in der zweiten Hauptbrennebene und ist unendlich klein.

In § 20 ist gezeigt worden, dass

$$Y_0 \tan \alpha_0 = Y_1 \tan \alpha_1, \quad \text{oder } x_0 \tan \alpha_0 = x_1 \tan \alpha_1$$

ist, wo α_0 den Divergenzwinkel zweier vom Objecte auslaufender Strahlen, α_1 den Convergenzwinkel der gebrochenen bezeichnen. Wenn α_1 stets kleiner als α_0 ist, im algebraischen Sinn genommen, so zeigt dies offenbar an, dass die Divergenz eintretender Strahlen vermindert oder auch in Convergenz verwandelt wird. Dies findet bei den Linsen mit positiver Brennweite nun ohne Ausnahme immer Statt. Nämlich für ein negatives x_0 ist entweder x_1 positiv und wenn α_0 positiv gerechnet wird, α_1 negativ; oder es ist x_1 negativ und absolut genommen grösser als x_0; alsdann α_1 positiv aber kleiner als α_0.

Ist x_0 gleich Null, so werden α_0 und α_1 zugleich 90° oder wie in § 20 gezeigt worden ist

$$\text{Lin}\left(\frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha_1}\right) = 1.$$

Wird x_0 positiv, so wird α_0 grösser als 90°. Dies ist zwar auch der Fall für α_1, sein Werth bleibt aber immer unter α_0.

Während α_0 sich dem Werthe 180° nähert, bleibt α_1 unter einer endlichen Gränze.

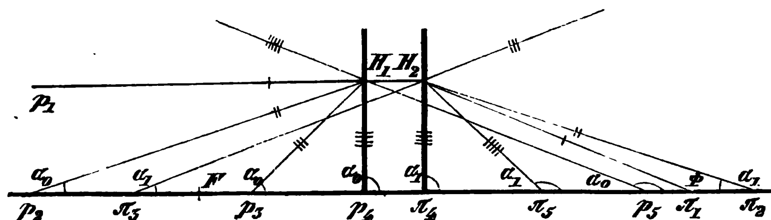


Fig. 52.

Die geometrischen Verhältnisse, welche aus diesen Beziehungen sich ergeben, sind übersichtlicher in Fig. 52 dargestellt.

Weil nun die Linsen mit positiver Brennweite die Divergenz eintretender Strahlen vermindern und die Convergenz eintretender Strahlen verstärken, werden sie *Sammel-* oder *Collectivlinsen* genannt.

II. *Die Dispersivlinsen.* Für diese gelten dieselben Formeln wie für die Collectivlinsen, nur mit dem Unterschiede, dass φ negativ ist. Die bei der Bestimmung der Lage und relativen Grösse conjugirter Punctsysteme in Betracht kommenden Formeln sind also

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{\varphi} \quad (\varphi \text{ negativ})$$

und

$$Y_0 : Y_1 = \varphi : (\varphi - x_1) = x_0 : x_1 .$$

Zunächst ergibt sich aus der ersten Gleichung, dass x_1 stets grösser als x_0 ist und dass für alle negativen Werthe von x_0 es auch x_1 sein muss. Die Linsen mit negativer Brennweite entwerfen demnach von reellen Objecten nur virtuelle Bilder. Desgleichen von den virtuellen Objecten, welche vor der ersten Hauptebene liegen. Die Bilder sind aufrecht und kleiner als die Objecte.

Rückt der Bildpunct in der Axe von dem ersten Hauptpunct weiter vor nach rechts (virtuelle Objecte), wird also x_0 positiv und bleibt absolut noch kleiner als φ, so wird auch x_1 positiv und nähert sich dem Werthe ∞. Wird endlich x_0 absolut genommen grösser als φ, so springt x_1 ins Negative zurück und nähert sich allmählig dem Grenzwerthe φ. Die Dispersivlinsen geben also von virtuellen Objecten auch reelle Bilder.

Die Bilder bleiben so lange aufrecht oder homothetisch als x_0 und x_1 gleiche Vorzeichen haben. Dasselbe ist der Fall, so lange $-\infty < x_0 < -\varphi$ ist. Bild und Object sind antithetisch, wenn $-\varphi < x_0 < \infty$ ist.

Vergleichen wir bei diesen Linsen den Winkel α_1, den zwei gebrochene Strahlen mit einander bilden, mit dem Winkel α_0 der einfallenden Strahlen, so ist hier stets $\alpha_0 < \alpha_1$. Dies geht deutlicher hervor aus Fig. 53.

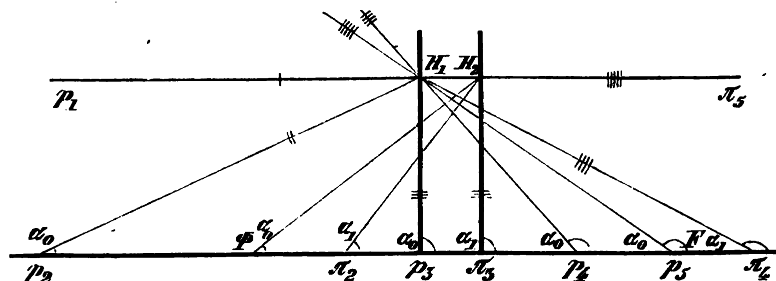


Fig. 53.

Da nun die Linsen mit negativer Brennweite die Divergenz einfallender Strahlen vermehren, die Convergenz eintretender Strahlen vermindern, so werden sie *Zerstreuungs-* oder *Dispersivlinsen* genannt.

Die Formeln der Dioptrik der Linsencombinationen. Wenn mehrere centrirte Linsen zu einem System vereinigt werden, so lassen sich auf dieselbe Art, wie für Combinationen von Systemen brechender Kugelflächen in § 21 und § 22 gezeigt worden ist, die Cardinalpuncte der Linsencombinationen berechnen. Wenn dabei die Linsendicke im Vergleich mit den übrigen Dimensionen sehr klein ist und die Linsen nahe aneinander liegen, so wird, wie es in der Praxis vielfach üblich ist, gestattet sein, die Linsendicke und die Abstände der Hauptpuncte zu vernachlässigen. Dadurch werden die dioptrischen Formeln sehr vereinfacht. § 38.

Ferner lassen sich die Betrachtungen des Durchganges der Lichtstrahlen sehr vereinfachen, wenn man statt der Brennweiten ihre reciproken Werthe einführt. Für eine einfache Linse fanden wir den Ausdruck (20)

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} = \frac{f_2 - \varphi_1 + d}{f_1 f_2}.$$

Setzt man $d = 0$, so wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{n_1}{f_2} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

wenn vor und hinter der Linse Luft befindlich ist. Demzufolge ist nun

$$\frac{1}{x_0} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{x_1},$$

wo wie früher x_0 den Abstand des Objects, x_1 den des Bildes von der Linse, f die erste Hauptbrennweite bezeichnen.

Sind nun $f', f'', f''', \ldots$ die Hauptbrennweiten mehrerer aneinander liegender Linsen und f die Hauptbrennweite der Combination, so findet man die Relation

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} + \frac{1}{f'''} + \ldots\ldots \quad (132)$$

Es sei s_0 der Abstand des Objects von der ersten Linse, s_1 der Abstand des Bildes von derselben. Da aber nach der Voraussetzung die Abstände von der ersten und zweiten Linse nicht von einander unterschieden werden, so ist s_1 auch der Abstand des ersten Bildes von der zweiten Linse, wobei das erste Bild zugleich das Object für die zweite Linse abgibt.

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{1}{s_0} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s_1}, \quad \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f''} + \frac{1}{s_2}, \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'''} + \frac{1}{s_3}, \ldots$$

Addirt man sämmtliche Gleichungen, so resultirt für m Linsen

$$\frac{1}{s_0} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} + \frac{1}{f'''} + \ldots\ldots \frac{1}{f^m} + \frac{1}{s_m}.$$

Wenn nun die einzelnen Puncte des Linsensystems, sowie die

Hauptpuncte nicht weiter unterschieden werden, dann ist $s_0 = x_0$ und $s_m = x_1$ zu setzen. Folglich wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} + \frac{1}{f'''} + \dots\dots$$

und

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi'} + \frac{1}{\varphi''} + \frac{1}{\varphi'''} + \dots\dots,$$

$$= (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) + \dots\dots$$

Haben alle Linsen eine gleiche Brennweite φ', so ist der Effect einer solchen Combination offenbar derselbe, als hätte man eine Linse angewendet, deren Brennweite sein würde

$$\varphi = \frac{1}{m}\varphi'.$$

Sind ausserdem die Linsen von gleicher Gestalt und materieller Beschaffenheit, so würde sein

$$\frac{1}{\varphi} = (n_1 - 1)\left(\frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}\right).$$

§ 39. **Vom Aplanatismus und Achromatismus der Linsen.** Wir haben allen früheren Betrachtungen die Voraussetzung zu Grunde gelegt, dass die Ordinaten sämmtlicher ein System brechender Kugelflächen durchsetzender Lichtstrahlen in den Scheitelpuncten gegen die Krümmungsradien verschwindend klein seien. Wir entfernen uns um so mehr von dieser Forderung, je kleiner die Krümmungsradien genommen werden. Die Randstrahlen der brechenden Flächen haben

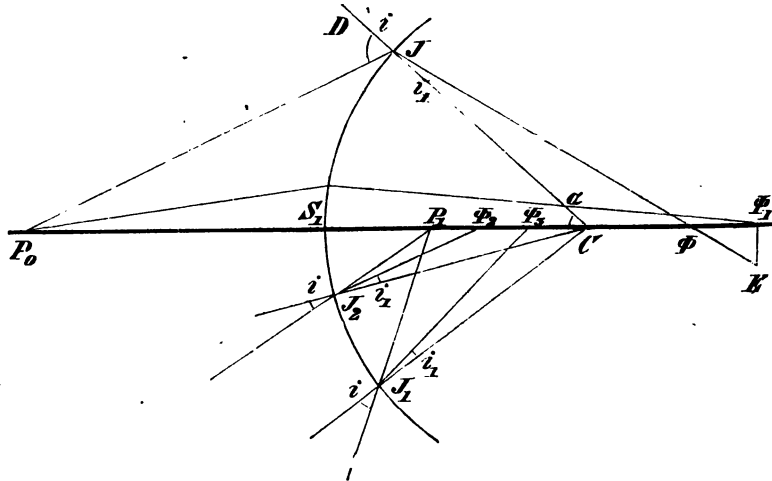


Fig. 54.

eine andere Brennweite als die Centralstrahlen und den Unterschied zwischen diesen Brennweiten nennt man die *sphärische Abweichung.*

Diese ist um so grösser, je kleiner der Krümmungsradius und je grösser der Winkel ist, den der zum Rande gezogene Radius mit der Axe bildet, oder je grösser das Verhältniss der Ordinate eines Strahles im Scheitelpuncte zum Krümmungsradius wird.

Wenn man statt des Näherungsverfahrens in § 4 nicht die Bogen statt der Winkelfunctionen einsetzt, sondern die Winkelfunctionen beibehält und die Abstände der conjugirten Puncte vom Krümmungsmittelpuncte abrechnet, so findet man, dass bei der einfachen convexen Fläche die Brennweite der Centralstrahlen grösser ist als die der Randstrahlen und die Abweichung nur dann Null ist, wenn die einfallenden Strahlen gegen den Krümmungsmittelpunct gerichtet sind.

Es sei P_0J (Fig. 54) der in die Fläche einfallende Strahl, $J\Phi_2$ der gebrochene, C das Centrum. Der Winkel S_1CJ sei α, der Einfallswinkel P_0JD gleich i, der Brechungswinkel ΦJC gleich i_1. Das Verhältniss $C\Phi : CP_0$ lässt sich auf folgende Art berechnen.

Nach bekannten Sätzen der Trigonometrie ist

$$\frac{P_0C}{JC} = \frac{\sin P_0JC}{\sin CP_0J} = \frac{\sin i}{\sin CP_0J},$$

$$\frac{\Phi C}{JC} = \frac{\sin \Phi JC}{\sin C\Phi J} = \frac{\sin i_1}{\sin C\Phi J}.$$

Durch Division beider Gleichungen erhält man

$$\frac{P_0C}{\Phi C} = \frac{\sin i}{\sin i_1} \cdot \frac{\sin C\Phi J}{\sin CP_0J} = n \cdot \frac{\sin C\Phi J}{\sin CP_0J}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{\sin C\Phi J}{\sin CP_0J} = \frac{P_0J}{\Phi J},$$

und folglich

$$\frac{P_0C}{\Phi C} = n \cdot \frac{P_0J}{\Phi J}.$$

Bezeichnet man P_0C mit k_0, ΦC mit k_1 und drückt P_0J und ΦJ durch r und α aus, so erhält man

$$\frac{k_0}{k_1} = n \sqrt{\frac{k_0^2 + r^2 - 2k_0r\cos\alpha}{k_1^2 + r^2 + 2k_1r\cos\alpha}}.$$

Nimmt man k_0 als constant, k_1 und α als variabel an, so erreicht der Quotient ein Minimum, also k_1 ein Maximum, wenn $\cos\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$ ist.

Es ist nämlich

$$-(k_1 + r)^2 \cdot 2k_0r(\cos\alpha - 1) > (k_0 - r)^2 \cdot 2k_1r(\cos\alpha - 1),$$

folglich

$$\frac{(k_0 - r)^2}{(k_1 + r)^2} < \frac{(k_0 - r)^2 - 2k_0r(\cos\alpha - 1)}{(k_1 + r)^2 + 2k_1r(\cos\alpha - 1)}$$

oder

$$\frac{k_0^2 + r^2 - 2k_0r}{k_1^2 + r^2 + 2k_1r} < \frac{k_0^2 + r^2 - 2k_0r\cos\alpha}{k_1^2 + r^2 + 2k_1r\cos\alpha}.$$

Für $k_0 = 0$ wird auch $k_1 = 0$.

Ist P_1 Object, als k_0 kleiner als r, so geht k_1 in die entgegen-

gesetzte Richtung über. Auch hier gilt die Gleichung

$$\frac{P_1 C}{\Phi_3 C} = n \cdot \frac{P_1 J_1}{\Phi_3 J_1}.$$

Bezeichnet man wiederum $P_1 C$ mit k_0, $\Phi_3 C$ mit k_1, so wird jetzt

$$\frac{k_0}{k_1} = n \sqrt{\frac{k_0^2 + r^2 - 2k_0 r \cos\alpha}{k_1^2 + r^2 - 2k_1 r \cos\alpha}}.$$

Nimmt man k_0 abermals constant, k_1 und α als variabel an, so erreicht der Quotient abermals ein Minimum, also k_1 ein Maximum, wenn $\cos\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$ genommen wird. Es ist nämlich sowol k_0 als k_1 kleiner als r und $k_1 < k_0$, folglich

$$k_0 k_1 (k_1 - k_0) > r^2 (k_1 - k_0)$$

$$k_1^2 k_0 + r^2 k_0 - 2 r k_0 k_1 > k_1 k_0^2 + r^2 k_1 - 2 r k_0 k_1$$

$$(k_1 - r)^2 k_0 > (k_0 - r)^2 k_1$$

$$-(k_1 - r)^2 . 2k_0 r (\cos\alpha - 1) > -(k_0 - r)^2 \cdot 2k_1 r (\cos\alpha - 1)$$

$$\frac{(k_0 - r)^2 - 2k_0 r (\cos\alpha - 1)}{(k_1 - r)^2 - 2k_1 r (\cos\alpha - 1)} > \frac{(k_0 - r)^2}{(k_1 - r)^2}$$

oder endlich

$$\frac{k_0^2 + r^2 - 2k_0 r \cos\alpha}{k_1^2 + r^2 - 2k_1 r \cos\alpha} > \frac{k_0^2 + r^2 - 2k_0 r}{k_1^2 + r^2 - 2k_1 r}.$$

Hieraus ergibt sich denn, dass der Brennpunct der einfallenden Strahlenbündel bei convexen Flächen sich um so mehr dem Centrum nähert, je weiter nach dem Rande sie einfallen. Bei concaven Flächen findet das Umgekehrte Statt. Für die Linsen finden ähnliche Abweichungen Statt. Die Ordinate $\Phi_1 E$ der Randstrahlen im Hauptbrennpuncte, wenn sie parallel mit der optischen Axe eintreten, nennt man die *sphärische Seitenabweichung.*

Die Abweichung oder Aberration bewirkt nun offenbar eine Verzerrung, Verwaschung und Undeutlichkeit der Bilder, welche abhängig ist von der Entfernung des Objects. Indessen gibt es für die concavconvexen Linsen eine von dem Verhältniss der Krümmungsradien und dem Brechungsindex abhängige Entfernung des Objects, für welche die Brennweiten der Rand- und Central-Strahlen gleich werden. Solche Linsen nennt man *aplanatisch.*

Man kann nun auch durch eine geeignete Wahl der Linsenkrümmungen Systeme von Linsen herstellen, welche die Abweichungen fast ganz aufheben. Man nennt solche Systeme aplanatische Linsensysteme. Ein einfacheres Mittel, die Abweichungen zu vermeiden, besteht darin, dass man statt einer Linse mit kurzer Brennweite, mehrere Linsen mit grossem Krümmungsradius wählt. Sind die Radien der ersteren ϱ_1 und ϱ_2, so muss für eine constante Brennweite die Gleichung

$$(n-1)\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right) = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) + \ldots \quad (133)$$

stattfinden. Man erhält in diesem Falle Bilder, welche deutlicher sind und zugleich eine grössere Helligkeit besitzen, als bei einer einzigen Linse von kurzer Brennweite, bei der man genöthigt ist, alle ausser wenigen Centralstrahlen abzublenden.

Eine andere Ursache der Verzerrung der Bilder haben wir in § 18 besprochen, nämlich die Krümmung derselben. Diese kann ebenfalls für bestimmte Fälle durch Anwendung mehrerer Linsen aufgehoben werden, wie dort gezeigt ist.

Eine dritte Ursache der Undeutlichkeit der Bilder von Objecten besteht darin, dass verschiedenfarbiges Licht eine verschiedene Brechbarkeit besitzt (chromatische Abweichung). Auch diese lässt sich durch Anwendung mehrerer Linsen von verschiedener Krümmung und verschiedenem Zerstreuungsvermögen des weissen Lichts vermeiden. (Achromatismus.) Man kann sogar auf alle diese Fälle Rücksicht nehmen und ein System herstellen, welches für Entfernungen der Objecte innerhalb ziemlich weiter Grenzen zugleich aplanatisch, achromatisch ist und keine Krümmung der Bilder erzeugt. Wir wollen in Kürze noch die Bedingungen aufsuchen, unter denen eine Combination von zwei Linsen eine gleiche Brennweite für die rothen und violetten Lichtstrahlen besitzen und noch ein Collectivsystem bilden. Um eine achromatische Collectivlinse herzustellen, muss man eine biconvexe Linse von Crownglas und eine convex-concave Linse von Flintglas anwenden, die zusammen eine gleiche Brennweite für die äussersten Farben des Spectrums besitzen.

Wir fanden in § 38 für einfarbiges Licht

$$\frac{1}{s_2} = \frac{1}{\varphi'} + \frac{1}{\varphi''} + \frac{1}{s_0}.$$

Bezeichnen wir nun mit s den Abstand des Objects, mit s'' den des Bildes, mit φ_r', und φ_r'' die Hauptbrennweiten der rothen Strahlen für die erste und zweite Linse, so ergibt sich

$$\frac{1}{s_r''} = \frac{1}{\varphi_r'} + \frac{1}{\varphi_r''} + \frac{1}{s}$$

und für die violetten Strahlen

$$\frac{1}{s_v''} = \frac{1}{\varphi_v'} + \frac{1}{\varphi_v''} + \frac{1}{s}.$$

Soll $s_v'' = s_r''$ werden, so ist diese Bedingung erfüllt durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varphi_r'} + \frac{1}{\varphi_r''} = \frac{1}{\varphi_v'} + \frac{1}{\varphi_v''}. \qquad (134)$$

Wir wollen hier nur den Fall berücksichtigen, wo die Brennweite der Combination gegeben ist und die zweite Fläche der vorderen Linse an die erste der hinteren Linse anliegt. Alsdann ist

$$\frac{1}{\varphi_r'} + \frac{1}{\varphi_r''} = \frac{1}{\varphi}, \quad \frac{1}{\varphi_v'} + \frac{1}{\varphi_v''} = \frac{1}{\varphi},$$

oder
$$(n_r'-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+(n_r''-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_4}\right)=\frac{1}{\varphi},$$
$$(n_v'-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+(n_v''-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_4}\right)=\frac{1}{\varphi}.$$
Diese beiden Gleichungen enthalten noch drei willkürliche Grössen r_1, r_2 und r_4. Man kann also, um diese Gleichungen zu bestimmten zu machen, noch eine dritte hinzufügen, z. B.
$$2r_2=-r_1, \quad r_2=-0{,}5r_1.$$
Berechnen wir eine achromatische Combination aus Crown- und Flintglas und setzen voraus*)
$$n_r'=1{,}5258 \qquad n_r''=1{,}6277$$
$$n_v'=1{,}5464 \qquad n_v''=1{,}6710,$$
so werden die beiden Gleichungen
$$0{,}5258\left(\frac{1}{r_1}+\frac{2}{r_1}\right)+0{,}6277\left(-\frac{2}{r_1}-\frac{1}{r_4}\right)=\frac{1}{\varphi},$$
$$0{,}5464\left(\frac{1}{r_1}+\frac{2}{r_1}\right)+0{,}6710\left(-\frac{2}{r_1}-\frac{1}{r_4}\right)=\frac{1}{\varphi}.$$
Durch Subtraction beider Gleichungen erhalten wir
$$0{,}0207\left(\frac{1}{r_1}+\frac{2}{r_1}\right)+0{,}0433\left(-\frac{2}{r_1}-\frac{1}{r_4}\right)=0$$
und nach einigen Reductionen
$$\frac{1}{r_4}=-\frac{0{,}5659}{r_1}, \quad r_4=-1{,}767r_1.$$
Mittels Substitution dieser Gleichung in eine der Gleichungen in φ erhält man r_1 und somit auch r_4.

Soll die Combination eine solche sein, bei welcher die Krümmung der Bilder für die chemisch wirksamsten Strahlen aufgehoben werden soll, so kann statt der Bedingung $2r_2=-r_1$ die Gleichung in § 18, nämlich
$$\frac{n_2(n_1-1)}{r_1}+\frac{n_2-1}{r_2}-\frac{n_1-1}{r_4}=0$$
hinzugezogen werden. Setzt man also $n_1=1{,}5465$, $n_2=1{,}6710$ so wird
$$\text{I} \quad \frac{0{,}9132}{r_1}+\frac{0{,}6710}{r_2}-\frac{0{,}5465}{r_4}=0$$
und weiter
$$\text{II} \quad \frac{0{,}5258}{r_1}+\frac{0{,}1019}{r_2}-\frac{0{,}6277}{r_4}=\frac{1}{\varphi},$$
$$\text{III} \quad \frac{0{,}5464}{r_1}+\frac{0{,}1246}{r_2}-\frac{0{,}6710}{r_4}=\frac{1}{\varphi}.$$
Subtrahirt man II von III, so wird
$$\text{IV} \quad \frac{0{,}0206}{r_1}+\frac{0{,}0227}{r_2}-\frac{0{,}0433}{r_4}=0.$$
Aus I und IV erhält man $r_2=-0{,}588r_1$ und $r_4=-2{,}359r_1$; für die bloss achromatische Combination war $r_2=-0{,}5r_1$ und $r_4=-1{,}767r_1$ gefunden. Dieselbe ist nahezu aplanatisch und hebt auch nahezu die Krümmung der Bilder auf.

*) Wüllner, Experimentalphys. II § 38.

II. Von der Brechung der Lichtstrahlen im normalen menschlichen Auge. — Ophthalmometrie.

Beschreibung des menschlichen Auges. Wir wenden uns der Betrachtung des Ganges der Lichtstrahlen in dem wichtigsten aller dioptrischen Systeme, dem menschlichen Auge zu. Dasselbe besteht aus mehreren hinter einander liegenden brechenden Medien, welche in der Richtung von vorne nach hinten durch centrirte Oberflächen zweiter Ordnung gegen einander begrenzt sind. In der Nähe der die Scheitelpuncte und Krümmungsmittelpuncte dieser Flächen verbindenden Geraden, der optischen Axe, können bei einem mittleren, normalen oder schematischen Auge diese Flächen als sphärisch, also die Krümmungsradien eines jeden Axenschnittes derselben als constant betrachtet werden. Das Auge wirkt in seiner Gesammtheit als ein Collectivsystem und entwirft im letzten brechenden Medium umgekehrte, reelle Bilder von äusseren Objecten, welche durch die Accommodationsfähigkeit des Auges auf der unverrückbaren das letzte Medium hinterwärts begrenzenden Nerven- oder *Netzhaut* (retina) zu Stande kommen und durch deren Lichtempfindlichkeit zur sinnlichen Wahrnehmung gebracht werden. § 40.

Das ganze Gesichtsorgan ist nach aussen von der weissen und harten *Sehnenhaut* (sclerotica) umgeben, welche dem eingeschlossenen dioptrischen Systeme eine kugelige Gestalt von etwa 12^{mm} Radius ertheilt und einen biegsamen, aber von den eingeschlossenen Flüssigkeiten prallen Körper, den *Augapfel* bildet. Der vordere Theil der Sclerotica ist die durchsichtige *Hornhaut* (cornea), durch welche die von den äusseren Objecten ausgehenden Lichtstrahlen in das Innere des Auges eintreten. Dieselbe bildet bei einem kleineren Krümmungsradius von 8^{mm} die Vorderfläche des dioptrischen Systems und hat eine Dicke von ungefähr 1^{mm}. Die Hornhaut ist begrenzt von zwei nahezu concentrischen Oberflächen und bildet eine sehr dünne convexconcave Linse.

Das zunächst hinter der Cornea liegende lichtbrechende Medium ist die *wässerige Feuchtigkeit* (humor aqueus) und der von derselben erfüllte Raum heisst die *vordere Augenkammer.* Diese wird hinter-

wärts begrenzt durch die Vorderfläche der ***Krystalllinse***, welche biconvex geformt ist mit zwei verschiedenen und durch Accommodation veränderlichen Krümmungen. Die Krystalllinse besteht aus vielen einzelnen centrirten Schichten, deren Oberflächenkrümmung und Brechungsvermögen von aussen nach innen bis zum *Kerne* (nucleus) zunimmt. Sie ist am Rande (aequator) mit der Sehnenhaut durch Muskeln und Bänder vielfach verbunden, wodurch sie in ihrer senkrechten Lage erhalten wird. In Gemeinschaft mit diesen Ausläufern scheidet die Linse die vordere Augenkammer von dem hinter ihr befindlichen noch übrigen und grössten kugeligen Raume, der *hinteren Augenkammer*, vollständig ab. In dieser letzteren befindet sich das vierte und letzte brechende Medium, der *Glaskörper* (humor vitreus), welcher von der lichtempfindenden sich an die innere Wölbung der Sehnenhaut anschmiegenden Netzhaut umhüllt ist. Die nebenstehende

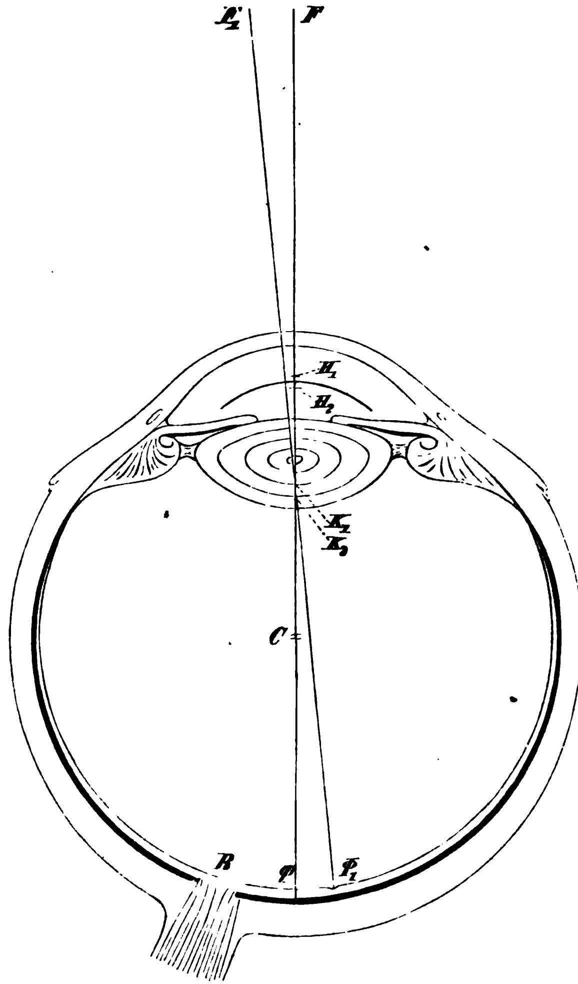


Fig. 55. Das menschliche Auge in 3½facher Vergrösserung. [Horizontaler Querschnitt des rechten Auges.]

Fig. 55 stellt einen Horizontalschnitt des rechten Auges in dreieinhalbfacher Vergrösserung dar.

Eine durch die Mitte der Hornhaut und den Kern der Krystalllinse gezogene Gerade $F\Phi$ geht durch das Centrum C des Augapfels und trifft die Retina in einem zwischen dem *gelben* (Φ') und dem *blinden* Flecke (B) befindlichen Puncte Φ. Sie heisst die *Augenaxe*

oder die *optische Axe* und ist zugleich die Axe der den Augapfel bildenden doppelten Rotationsfläche. Im gelben Flecke liegt die *Netzhautgrube* (fovea centralis), derjenige Theil der Netzhaut, welcher die Stelle des directen und deutlichsten Sehens ausmacht.

Die innere oder hintere Abtheilung des von der Sclerotica umschlossenen Systems, nämlich die Krystalllinse, der Glaskörper und die Retina sind eingehüllt von der *Weinbeerenhaut* (uvea), welche in der Figur durch eine schwarze Linie erkennbar wird und deren Stielöffnung die Pupille entspricht.

Diese Haut ist auf ihrer ganzen innern Fläche mit schwarzen Pigmentzellen bedeckt. Vor der Krystalllinse sich dicht aber unverbunden an deren Vorderfläche anschmiegend, bildet die Uvea eine kreisförmige *Blende* mit veränderlicher Oeffnung, die *Regenbogenhaut* (iris) mit der *Pupille*, durch welche das Auge in den Stand gesetzt ist, nach Umständen zu grelles Licht abzublenden und entweder nur Centralstrahlen zur Verschärfung der Bilder oder auch mehr Randstrahlen zur Erhellung des Gesichtsfeldes in die Linse eintreten zu lassen. Durch die Weite der Pupille und ihren Abstand von der Hornhaut ist das Gesichtsfeld eines einzelnen Auges bestimmt; dasselbe entspricht nahezu einer halben Kugelfläche. Den hinteren Theil der Uvea, welcher innerhalb der hintern Augenkammer die innere Fläche der Sehnenhaut bekleidet und die Retina umschliesst, nennt man die *Aderhaut* (chorioidea).

Hinter dem blinden Flecke wird die Sclerotica vom Sehnerven durchbohrt, welcher sich mit seinen Fasern radial über die ganze Retina ausbreitet. Diese Eintrittsstelle liegt etwas nach der Nasenseite zu, also einwärts von der optischen Axe; sie ist nicht lichtempfindlich. Etwas nach der Schläfenseite hinüber, also auswärts von der optischen Axe, liegt der gelbe Fleck.

Mittels vieler am Rande der Krystalllinse an der sie einhüllenden häutigen Linsenkapsel befestigten radialen und circulären Muskelfasern kann die Krümmung der beiden Linsenflächen, insbesondere der vorderen innerhalb gewisser Grenzen verändert werden, so dass für die verschiedensten Entfernungen der äusseren Objecte das im Glaskörper entstehende reelle Bild auf die unverrückbare Retina fällt.

Diese Thätigkeit des Auges unterscheidet man als *Accommodation* für die Nähe und die Ferne (l'accommodation de près et au loin). Der Mechanismus der Accommodation besteht nach Helmholtz's Ansicht darin, dass die zonula Zinnii, welche sich in einer gewellten Linie an den Aequatorialrand der Linse an deren Kapsel festsetzt, die Linse im ruhenden, fernsehenden Zustande in der Richtung vom Centrum nach der Peripherie dehnt. Durch Contraction des *Ciliarmuskels*, welcher sich am äusseren Rande der Iris befindet und mit derselben gemeinschaftlich an der innern Wand der Sehnenhaut

angeheftet ist, kann die Zonula nach vorne gezerrt und dadurch ihre Spannung vermindert werden. In Folge dieser Verminderung der Spannung wird die Oberfläche des weichen Linsenkörpers kleiner und nähert sich dadurch mehr der Kugelgestalt, wobei die nächste Wirkung die ist, dass die vordere beim Fernsehen minder gewölbte Linsenfläche sich in ihrer Krümmung der hinteren nahezu bis zur Gleichheit nähert, so dass die Linse in eine nahezu gleichseitig biconvexe übergeht, deren Dicke etwa 4^{mm} und deren Aequatorialdurchmesser etwa 9^{mm} beträgt.

Von den auf der Netzhaut entworfenen Bildern der äusseren Objecte wird nur derjenige Theil deutlich wahrgenommen, welcher in die Nähe der Augenaxe fällt; die übrigen Theile werden um so undeutlicher, je weiter die entsprechenden Theile der Objecte von dieser Richtung abweichen. Durch die grosse Beweglichkeit des Augapfels in der Augenhöhle ist indess das Auge befähigt, schnell nacheinander jeden Punct der im Gesichtsfelde liegenden Objecte aufmerksam zu betrachten, während es die Hauptumrisse mit einem einzigen Bilde zu erfassen im Stande ist. Die in der Augenhöhle befestigten zur Bewegung (Rotation) des Augapfels bestimmten sechs Muskeln sind:

a) der innere und äussere gerade (musc. rectus medialis et lateralis),
b) der obere und untere gerade (musc. rect. superior et inferior),
c) der obere und untere schiefe (musc. obliquus sup. et inf.).

Um die Lage und Grösse der Bilder bei den verschiedenen Entfernungen der ausser dem Auge befindlichen und von demselben betrachteten Objecte bestimmen zu können, bedarf es der Kenntniss der optischen und dioptrischen Constanten, deren Berechnung sich auf zahlreiche Beobachtungen und Messungen des Brechungsvermögens der Medien, der Dicke ihrer Schichten und der Krümmungen ihrer Trennungsflächen in der Nähe der optischen Axe basirt.

§ 41. **Gang der Lichtstrahlen im menschlichen Auge.** Die Lichtstrahlen, welche von einem äusseren Objecte auf die Vorderfläche der Hornhaut treffen, werden zunächst in dieser und in der wässrigen Feuchtigkeit so gebrochen, dass die zweite Brennweite etwa 32^{mm} beträgt und von einem sehr entfernten Puncte sein Bild etwa 10^{mm} hinter der Retina zu Stande kommen würde. Parallel eintretende Lichtstrahlen gehen also convergirend durch die vordere Augenkammer und treffen auf die biconvexe Krystalllinse von grösserem Brechungsvermögen. Dieselbe wirkt demnach als Sammellinse, wodurch die durchgehenden Lichtstrahlen an Convergenz zunehmen und in der Nähe der Netzhaut zur Vereinigung gebracht werden. Die zweite Hauptbrennweite des ganzen Auges bezogen auf die Vorderfläche der

Hornhaut würde demnach nahezu gleich dem diagonalen Durchmesser des Auges sein. Die Höhe der Hornhaut über ihrer Basis beträgt etwa 2^{mm}, der innere diagonale Durchmesser des Auges 20^{mm} und der Ort des zweiten Hauptbrennpuncts bezogen auf die Vorderfläche der Hornhaut $22{,}5^{mm}$.

Von der Vorderfläche der Hornhaut an ist die Zunahme der Convergenz der eintretenden Lichtstrahlen eine ununterbrochene; sie beginnt in der wässrigen Feuchtigkeit, vergrössert sich allmählig im Innern der Krystalllinse an den einzelnen Schichtflächen und endet im Glaskörper.

Um den Gang der Lichtstrahlen genauer zu definiren, ist die Kenntniss der Oerter der Cardinalpuncte des Auges während irgend eines Zustandes desselben nothwendig. Die Oerter der Cardinalpuncte ändern ihre Lage, wenn das Auge nacheinander Objecte aus verschiedenen Entfernungen betrachtet. Während die Brechungsindices der einzelnen Medien für dasselbe individuelle Auge constant bleiben, ändern sich die Krümmungen einzelner Trennungsflächen und die Abstände derselben von einander. Die Messungen dieser Elemente an dem menschlichen Auge überhaupt, sowie in den einzelnen Zuständen desselben im Besondern ist die Aufgabe der *Ophthalmometrie.* Wenn dieselben auch vielen individuellen Abweichungen unterworfen sind, so gibt es bei normalen Augen doch ziemlich unveränderliche Mittelwerthe der optischen Constanten. Als Ausgangspunct der Berechnung der Cardinalpuncte des Auges wählen wir

1) die Angaben *Listing's**) für ein normales Auge im Zustande der Accommodation auf sehr entfernte Objecte;

2) die Angaben von *Helmholtz***) für ein normales Auge und zwar

   a) im Zustande der Accommodation für die Ferne,

   b) in der Accommodation für die Nähe.

Obgleich an den a. O. die aus den zu Grunde gelegten Elementen berechneten Constanten vollständig angegeben sind, wollen wir doch zur klareren Einsicht in den Gang der Rechnung diese nach verschiedenen der früher entwickelten Methoden ausführen. Von den genannten Physiologen wird ein sogenanntes totales Brechungsvermögen der Krystalllinse angenommen und vorausgesetzt, dass die Hornhaut als eine verhältnissmässig sehr dünne convexconcave Schicht als blosse vordere Begrenzungsfläche der vordern Augenkammer betrachtet werden dürfe. Helmholtz fügt auch eine weitere mathematische Begründung dieser gerechtfertigten Annahme hinzu. Seine Annahme eines imaginären Brechungsindex der Krystalllinse ist auf eigene Messungen und die anderer Physiker gestützt. Wie sich dieser

*) R. Wagner's Handwörterbuch der Physiologie. Artikel: Sehen. S. 286.

**) Physiolog. Optik. § 12.

Brechungsindex aus der besonderen Beschaffenheit der Krystalllinse annähernd berechnen lässt, ist von *von Zehender**) an mehreren Beispielen gezeigt worden. Wir werden in einem späteren Abschnitte eine solche Berechnung nach einer andern Methode und unter Zugrundelegung neuerer Messungen wiederholen.

Zur Berechnung der Cardinalpuncte des Auges kann man entweder, wie dies in der Regel geschieht, aus den drei brechenden Medien, der wässrigen Feuchtigkeit, der Linse und dem Glaskörper zwei besondere Systeme bilden und diese sodann zu einem einzigen Systeme combiniren (§ 22), oder auf Grund der in § 21 entwickelten Methode eine successive Bestimmung der Fundamentalpuncte von Fläche zu Fläche vornehmen, oder eine directe Bestimmung nach den von uns in § 25 entwickelten Formeln (53) und (54), (59) und (60), oder endlich mittels der in § 26 entwickelten Kettenbruchfunctionen (62), (63), (65) und (66) diese Berechnung auf einmal ausführen. Wenn zwar die Gauss'schen Kettenfunctionen die gesuchten Elemente in kürzester und elegantester Form darstellen, so eignen sie sich doch bei wachsender Anzahl der Schichten sehr wenig zur numerischen Berechnung. Dagegen gebührt der dritten Methode in dieser Hinsicht der Vorrang. Nur wenn wie beim menschlichen Auge es von Interesse ist, auch die Cardinalpuncte irgend eines Theiles des ganzen Systems, wie z. B. der Krystalllinse, durch Rechnung zu gewinnen, kann auch die erste Methode mit Vortheil zur Anwendung gebracht werden. Es sollen deshalb bei den folgenden Rechnungen alle genannten Methoden Berücksichtigung finden mit Ausnahme der zweiten.

§ 42. **Listing's schematisches Auge in der Accommodation für die Ferne.** Listing nimmt an

1) den Brechungsindex der wässrigen Feuchtigkeit . $= \frac{103}{77}$
2) - - - Krystalllinse . . . . . $= \frac{16}{11}$
3) - - des Glaskörpers . . . . . $= \frac{103}{77}$
4) den Krümmungshalbmesser der vordern Hornhautfläche $= 8^{mm}$
5) - - - - - Linsenfläche $= 10^{mm}$
6) - - - - hintern - $= -6^{mm}$
7) die Dicke der Hornhaut . . . . $= 1^{mm}$
8) - - - wässrigen Flüssigkeitsschicht . . . $= 3^{mm}$
9) - - - Krystalllinse . . . . $= 4^{mm}$.

Erste Methode der Berechnung. Wir betrachten das innere Auge zunächst als eine Combination von zwei brechenden Systemen, von denen das erste die Vorderfläche der Hornhaut mit Luft vor und wässriger Feuchtigkeit hinter sich bildet; das zweite die Krystalllinse

*) Dioptrik des menschlichen Auges. S. 65. 184.

mit der wässrigen Feuchtigkeit vor und dem Glaskörper hinter sich. Es sind zuvörderst die Cardinalpuncte der beiden Systeme einzeln zu berechnen und dann nach der in § 22 gegebenen Anleitung die Cardinalpuncte der Combination beider.

a. *Erstes System.* Der Brechungsindex n_1 der wässrigen Feuchtigkeit ist gleich 103 : 77, $r_1 = 8^{mm}$ der Krümmungsradius. Die Hauptpuncte liegen beide im Scheitel der Hornhaut, die Knotenpuncte in ihrem Krümmungsmittelpuncte. Die Brennweiten des ersten Systems sind

$$f_1 = -\frac{r_1}{n_1 - 1} = -\frac{8.77}{26} = -23{,}6923^{mm},$$

$$\varphi_1 = \frac{n_1 r_1}{n_1 - 1} = \frac{8.103}{26} = 31{,}6923^{mm},$$

$$\alpha_{1,1} = \alpha_{2,1} = 0, \quad \varepsilon_1 = 0.$$

b. *Zweites System.* Der Brechungsindex n_2 ist gleich $N_2 : N_1$, d. i. gleich dem relativen Brechungsvermögen der Linse im Verhältniss zu dem des Kammerwassers, also

$$n_2 = \frac{16}{11} : \frac{103}{77} = \frac{112}{103} = 1{,}0874.$$

Der relative Brechungsindex n_3 ist gleich $N_3 : N_2$ oder

$$n_3 = \frac{103}{77} : \frac{16}{11} = \frac{103}{112} = \frac{1}{1{,}0874}.$$

Der Radius r_2 der Vorderfläche der Linse ist gleich 10^{mm} und r_3 gleich 6^{mm}; die Dicke $d_2 = 4^{mm}$. Gemäss Formel (116), (117), (118) und (119) ist nun

$$-f_2 = \varphi_2 = 43{,}7965^{mm},$$

$$\alpha_{1,2} = -2{,}3462^{mm}, \quad \alpha_{2,2} = 1{,}4077^{mm}, \quad \varepsilon_2 = 0{,}2461^{mm}.$$

Helmholtz fand durch Messungen*) an einer im Glaskörper gelegenen todten Linse die Brennweite gleich $45{,}144^{mm}$, die Abstände der Flächen von den Hauptpuncten $\alpha_{1,2} = -2{,}258^{mm}$ und $\alpha_{2,2} = 1{,}546^{mm}$, welche von den für das Listing'sche Auge berechneten Werthen nicht sehr abweichen.

Wir erhalten nun die Cardinalpuncte der Combination beider Systeme, also des ganzen Auges mittels der Formeln (35) bis (39). Sind $H_{\alpha,1} H_{\beta,1}$ die Hauptpuncte des ersten, $H_{\alpha,2} H_{\beta,2}$ die des zweiten Systems, $H_\alpha H_\beta$ die des ganzen Auges, so ist

$$D_1 = H_{\beta,1} H_{\alpha,2} = 4 + 2{,}3462 = 6{,}3462^{mm},$$

$$(35) \quad f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - \varphi_1 + D_1} = \frac{23{,}6923 \,.\, 43{,}7965}{-43{,}7965 - 31{,}6923 + 6{,}3462} = -15{,}0072,$$

$$(38) \quad \varphi = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{f_2 - \varphi_1 + D_1} = \frac{-31{,}6923 \,.\, 43{,}7965}{-75{,}4888 + 6{,}3462} = 20{,}0746,$$

*) Physiol. Optik § 10. Man vergleiche auch oben § 30 und § 34.

$$(36)\quad \alpha_1 = H_\alpha H_{\alpha,1} = -\frac{f_1 D_1}{M_1} = \frac{23{,}6923 \,.\, 6{,}3462}{-75{,}4888 + 6{,}3462} = -2{,}1746,$$

$$(39)\quad \alpha_2 = H_\beta H_{\beta,2} = -\frac{\varphi_2 D_1}{M_1} = \frac{-43{,}7965 \,.\, 6{,}3462}{-75{,}4888 + 6{,}3462} = 4{,}0199.$$

Ferner ist

$$\begin{array}{ll} H_{\alpha,1} S_1 = \alpha_{1,1} & H_{\beta,2} S_3 = \alpha_{2,2} \\ H_\alpha H_{\alpha,1} = \alpha_1 & H_\beta H_{\beta,2} = \alpha_2 \\ \hline H_\alpha S_1 = \alpha_{1,1} + \alpha_1 & H_\beta S_3 = \alpha_{2,2} + \alpha_2. \end{array}$$

Nun fanden wir

$$\begin{array}{ll} \alpha_{1,1} = \quad 0{,}0000^{mm} & \alpha_{2,2} = 1{,}4077^{mm} \\ \alpha_1 \;\; = -2{,}1746^{mm} & \alpha_2 \;\; = 4{,}0199^{mm} \\ \hline H_\alpha S_1 = -2{,}1746^{mm} & H_\beta S_3 = 5{,}4276^{mm} = 8^{mm} - 2{,}5724^{mm}. \end{array}$$

Wir haben noch die Lage der Knotenpuncte zu bestimmen. Es ist nämlich

$$K_\beta \Phi = -H_\alpha F = -f = 15{,}0072^{mm},$$

$$S_3 \Phi = \varphi - H_\beta S_3 = 20{,}0746 - 5{,}4276 = 14{,}6470^{mm},$$

folglich $K_\beta S_3 = K_\beta \Phi - S_3 \Phi = 0{,}3602^{mm}.$

Weiter ist

$$K_\alpha F = -H_\beta \Phi = -\varphi = -20{,}0746^{mm},$$

$$S_1 F = f - H_\alpha S_1 = -15{,}0072 + 2{,}1746 = -12{,}8326^{mm},$$

folglich $K_\alpha S_1 = K_\alpha F - S_1 F = -7{,}2420^{mm}.$

Ausserdem ist

$$K_\alpha S_3 = S_1 S_3 - S_1 K_\alpha = 8 - 7{,}2420 = 0{,}7580^{mm},$$

und das Interstitium

$$\varepsilon = H_\alpha H_\beta = S_1 S_3 - (S_1 H_\alpha + H_\beta S_3) = 0{,}3978^{mm}.$$

Hieraus haben sich nun folgende Constanten für das schematische Auge ergeben, indem wir die Oerter der sechs Cardinalpuncte theils auf den Scheitel S_1 der Vorderfläche der Hornhaut, theils auf den Scheitel S_3 der Hinterfläche der Linse beziehen (Fig. 55):

1) $S_1 F = -12{,}8326^{mm}, \quad S_3 \Phi = 14{,}6470^{m},$

d. h. der *erste Hauptbrennpunct* liegt $12{,}8326^{mm}$ vor dem Hornhautscheitel, der *zweite* $14{,}6470^{mm}$ hinter der Hinterfläche der Linse.

2) $S_1 H_\alpha = -H_\alpha S_1 = 2{,}1746^{mm}, \quad S_1 H_\beta = 2{,}5724^{mm},$

d. h. der *erste Hauptpunct* liegt $2{,}1746^{mm}$, der *zweite* $2{,}5724^{mm}$ hinter dem vordern Hornhautscheitel und das Interstitium ε ist positiv, nämlich gleich $0{,}3978^{mm}$.

3) $S_3 K_\alpha = -0{,}7580^{mm}, \quad S_3 K_\beta = -0{,}3602^{mm},$

d. h. der *erste Knotenpunct* liegt $0{,}7580^{mm}$, der *zweite* $0{,}3602^{mm}$ vor der hinteren Linsenfläche.

4) $H_\alpha F = -15{,}0072^{mm}, \quad H_\beta \Phi = 20{,}0746^{mm},$

d. h. die *erste Hauptbrennweite* ist negativ und der erste Hauptbrennpunct liegt $15{,}0072^{mm}$ vor dem ersten Hauptpuncte; die *zweite Hauptbrennweite* ist positiv und der zweite Hauptbrennpunct liegt $20{,}0746^{mm}$ hinter dem zweiten Hauptpuncte.

Zweite Methode der Berechnung. (Man vergl. § 25.) Ist F der erste Hauptbrennpunct, F_2 sein Bildpunct im Medium M_1 (Kammerwasser), F_3 der zweite Bildpunct im Medium M_2 (Krystalllinse), so liegt der dritte Bildpunct F_4 im Medium M_3 (Glaskörper) unendlich weit entfernt. Ferner sei d_1 die Dicke der Schicht des Mediums M_1, d_2 die Dicke des Mediums M_2. Endlich bezeichne S_1 (Σ_3) den Scheitelpunct der vordern Hornhautfläche, S_2 (Σ_2) den Scheitelpunct der vordern Linsenfläche, S_3 (Σ_1) den Scheitelpunct der hinteren Linsenfläche; also

$$S_1 S_2 = d_1 = \Sigma_3 \Sigma_2 = \delta_2,$$
$$S_2 S_3 = d_2 = \Sigma_2 \Sigma_1 = \delta_1.$$

Alsdann ist nach (53)

$$f = S_1 F \frac{S_2 F_2 \times S_3 F_3}{(S_2 F_2 + d_1)\,(S_3 E_3 + d_2)},$$

nach (54)

$$\varphi = \Sigma_1 \Phi \frac{\Sigma_2 \Phi_2 \times \Sigma_3 \Phi_3}{(\Sigma_2 \Phi_2 - \delta_1)\,(\Sigma_3 \Phi_3 - \delta_2)};$$

und weiter

$$\alpha_1 = f - S_1 F, \quad \alpha_2 = \varphi - \Sigma_1 \Phi.$$

Es werden der Rechnung wiederum folgende Daten zu Grunde gelegt:

$$n_1 = \frac{103}{77}, \quad n_2 = \frac{112}{103}, \quad n_3 = \frac{103}{112},$$
$$r_1 = 8^{mm}, \quad r_2 = 10^{mm}, \quad r_3 = -6^{mm},$$
$$d_1 = \delta_2 = 4^{mm}, \quad d_2 = \delta_1 = 4^{mm}.$$

Die Abscissenformeln conjugirter Puncte bezüglich der drei Flächen seien

$$\frac{f_1}{s_0} + \frac{\varphi_1}{s_1} = \frac{f_2}{s_2} + \frac{\varphi_2}{s_3} = \frac{f_3}{s_4} + \frac{\varphi_3}{s_5} = 1.$$

Alsdann gelten folgende Gleichungen:

$$f_1 = -\frac{r_1}{n_1 - 1}, \quad \varphi_1 = \frac{n_1 r_1}{n_1 - 1}, \quad S_1 F = s_0, \quad S_1 F_2 = s_1;$$

$$f_2 = -\frac{r_2}{n_2 - 1}, \quad \varphi_2 = \frac{n_2 r_2}{n_2 - 1}, \quad S_2 F_2 = s_2, \quad S_2 F_3 = s_3;$$

$$f_3 = -\frac{r_3}{n_3 - 1}, \quad \varphi_3 = \frac{n_3 r_3}{n_3 - 1}, \quad S_3 F_3 = s_4, \quad S_3 F_4 = s_5 = \infty.$$

Hieraus ergibt sich nun

$$S_3 F_3 = -\frac{r_3}{n_3 - 1}, \quad S_2 F_3 = S_3 F_3 + d_2;$$

$$S_2F_2 = \frac{S_2F_3 \cdot r_2}{n_2r_2 - (n_2 - 1)\,S_2F_3}, \quad S_1F_2 = S_2F_2 + d_1;$$
$$S_1\,F = \frac{S_1F_2 \cdot r_1}{n_1r_1 - (n_1 - 1)\,S_1F_2}.$$

Setzt man die Daten successive in diese Gleichungen ein, so erhält man

$$S_3F_3 = -74{,}67, \quad S_2F_3 = -70{,}67;$$
$$S_2F_2 = -41{,}45, \quad S_1F_2 = -37{,}45,$$
$$S_1\,F = -12{,}833.$$

Demnach ist

$$f = -12{,}833\,\frac{41{,}45 \cdot 74{,}67}{37{,}45 \cdot 70{,}67} = -15{,}007,$$

und

$$\alpha_1 = f - S_1F = -2{,}174.$$

Ferner ergeben sich aus den Annahmen

$$\Sigma_1\,\Phi = s_5, \quad \Sigma_1\Phi_2 = s_4,$$
$$\Sigma_2\Phi_2 = s_3, \quad \Sigma_2\Phi_3 = s_2,$$
$$\Sigma_3\Phi_3 = s_1, \quad \Sigma_3\Phi_4 = s_0 = \infty$$

die Relationen

$$\Sigma_3\Phi_3 = \frac{n_1r_1}{n_1 - 1}, \quad \Sigma_2\Phi_3 = \Sigma_3\Phi_3 - \delta_1,$$
$$\Sigma_2\Phi_2 = \frac{\Sigma_2\Phi_3 \cdot n_2r_2}{r_2 + (n_2 - 1)\,\Sigma_2\Phi_3}, \quad \Sigma_1\Phi_2 = \Sigma_2\Phi_2 - \delta_2,$$
$$\Sigma_1\,\Phi = \frac{\Sigma_1\Phi_2 \cdot n_3r_3}{r_3 + (n_3 - 1)\,\Sigma_1\Phi_2}.$$

Setzt man auch hierin die Daten ein, so erhält man

$$\Sigma_3\Phi_3 = 31{,}70, \quad \Sigma_2\Phi_3 = 27{,}70,$$
$$\Sigma_2\Phi_2 = 24{,}25, \quad \Sigma_1\Phi_2 = 20{,}25,$$
$$\Sigma_1\,\Phi = 14{,}647.$$

Demnach ist

$$\varphi = 14{,}647\,\frac{24{,}25 \cdot 31{,}70}{20{,}25 \cdot 27{,}70} = 20{,}075,$$

und

$$\alpha_2 = \varphi - \Sigma_1\Phi = 5{,}428.$$

Zur Controle der Rechnung vergleiche man den für φ gefundenen Werth mit dem von f. Es muss

$$\varphi : (-f) = n_1n_2n_3$$

sein, was in der That der Fall ist.

Diese Methode hat vor der ersten den Vorzug, dass eine Verwechselung der Vorzeichen so leicht nicht vorkommen kann. Dieser Gefahr ist man bei der vorigen leicht ausgesetzt, namentlich dann, wenn die aufeinander folgenden Interstitien ihr Vorzeichen ändern.

Man kann auch α_2 aus α_1 direct berechnen, ohne die Kenntniss von f oder φ, indem man Formel (81) anwendet. Man setze $s_0 = -\alpha_1$ und berechne s_2 und s_4: dann ist wie in § 28 gezeigt worden ist

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = n_1n_2n_3\,\frac{s_2 \times s_4}{(s_2 + d_1)\,(s_4 + d_2)} = n_1n_2n_3\,\frac{(s_1 - d_1)\,(s_3 - d_2)}{s_1 \times s_3}.$$

Man berechne zu dem Zwecke folgende Gleichungen:

$$s_1 = \frac{\alpha_1 n_1 r_1}{(n_1 - 1)\,\alpha_1 - r_1}, \quad s_2 = s_1 - d_1,$$

$$s_3 = \frac{s_2 n_2 r_2}{(n_2 - 1)\,s_2 + r_2}, \quad s_4 = s_3 - d_2.$$

Setzt man $\alpha_1 = -2{,}174$, so findet man

$$s_1 = 2{,}6636, \quad s_3 = -1{,}4703,$$

und hieraus weiter, da $n_2 n_3 = 1$ ist,

$$\alpha_2 = -2{,}174 \cdot \frac{103}{77} \cdot \frac{(-1{,}3364)\,(-5{,}4703)}{2{,}6636\,(-1{,}4703)} = 5{,}428,$$

in Uebereinstimmung mit dem oben gefundenen Werthe.

Dritte Methode der Berechnung der Cardinalpuncte des Auges. (Man vergl. § 23 und § 26.) Zur directen Bestimmung der dioptrischen Constanten kann man sich noch der Kettenfunctionen bedienen. Für *drei* brechende Flächen ist nach § 23

$$S_1 F = \frac{f_1}{1 - \cfrac{\varphi_1}{d_1 + S_2 F_2}} = f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{d_1 - \varphi_1 + S_2 F_2},$$

$$S_2 F_2 = \frac{f_2}{1 - \cfrac{\varphi_2}{d_2 + S_3 F_3}} = f_2 + \frac{f_2 \varphi_2}{d_2 - \varphi_2 + F_3 S_3},$$

$$S_3 F_3 = f_3.$$

Ferner ist

$$\Sigma_1 \Phi = \frac{\varphi_3}{1 - \cfrac{f_3}{-d_2 + \Sigma_2 \Phi_2}} = \varphi_3 - \frac{\varphi_3 f_3}{d_2 + f_3 - \Sigma_2 \Phi_2},$$

$$\Sigma_2 \Phi_2 = \frac{\varphi_2}{1 - \cfrac{f_2}{-d_1 + \Sigma_3 \Phi_3}} = \varphi_2 - \frac{\varphi_2 f_2}{d_1 + f_2 - \Sigma_3 \Phi_3},$$

$$\Sigma_3 \Phi_3 = \varphi_1.$$

Es ist nun nach § 26 (61) $f_1 \frac{N_0}{N_1}$ der Werth des ganzen Kettenbruches $S_1 F$ und gemäss (64) $\varphi_3 \frac{N_2}{N_1}$ der Werth des Kettenbruches $\Sigma_1 \Phi$; also (43) und (44)

$$S_1 F = f_1 \frac{N_0}{N_1} = f_1 \frac{(d_1, f_2, 1, -\varphi_2, d_2, f_3, 1)}{(1, -\varphi_1, d_1, f_2, 1, -\varphi_2, d_2, f_3, 1)},$$

$$\Sigma_1 \Phi = \varphi_3 \frac{N_2}{N_1} = \varphi_3 \frac{(1, -\varphi_1, d_1, f_2, 1, -\varphi_2, d_2)}{(1, -\varphi_1, d_1, f_2, 1, -\varphi_2, d_2, f_3, 1)}.$$

Durch Reduction des Kettenbruches auf einen gemeinen Bruch ergeben sich nach (55) und (57) folgende Werthe:

$$N_0 = f_2\,(f_3 + d_2) + (f_3 - \varphi_2 + d_2)\,d_1,$$

$$N_1 = (f_2 - \varphi_1 + d_1)\,(f_3 + d_2) + \varphi_2\,(\varphi_1 - d_1),$$

$$N_2 = \varphi_2\,(\varphi_1 - d_1) + (f_2 - \varphi_1 + d_1)\,d_2.$$

Die Hauptbrennweiten und die Abstände der Puncte S_1 und S_3 von den Hauptpuncten sind alsdann gemäss (62), (63), (65) und (66)

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3}{N_1};\quad \varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{N_1} = -n_1 n_2 n_3 f,$$

$$\alpha_1 = f - S_1 F = \frac{f_1 (f_2 f_3 - N_0)}{N_1},$$

$$\alpha_2 = \varphi - \Sigma_1 \Phi = \frac{\varphi_3 (\varphi_2 \varphi_1 - N_2)}{N_1}.$$

Um die Oerter der Puncte F und Φ, H_α und H_β, K_α und K_β, U_α und U_β zu erhalten, bedarf es der Substitution folgender Zahlenwerthe:

$$f_1 = -\frac{r_1}{n_1 - 1} = -23{,}6923,\quad \varphi_1 = \frac{n_1 r_1}{n_1 - 1} = 31{,}6923,$$

$$f_2 = -\frac{r_2}{n_2 - 1} = -114{,}4444,\quad \varphi_2 = \frac{n_2 r_2}{n_2 - 1} = 124{,}4444,$$

$$f_3 = -\frac{r_3}{n_3 - 1} = -74{,}6667,\quad \varphi_3 = \frac{n_3 r_3}{n_3 - 1} = 68{,}6667,$$

$$d_1 = 4,\quad d_2 = 4.$$

Man findet durch Substitution dieser Zahlenwerthe in die obenstehenden Gleichungen

$$N_0 = 7306{,}96,\quad N_1 = 13490{,}48,\quad N_2 = 2877{,}60,$$

und

$$f = (-1)^3 \frac{23{,}6923 \,.\, 114{,}4444 \,.\, 74{,}6667}{13490{,}48} = -15{,}0072,$$

$$\varphi = \frac{31{,}6923 \,.\, 124{,}4444 \,.\, 68{,}6667}{13490{,}48} = 20{,}0746,$$

$$\alpha_1 = -15{,}0072 + \frac{23{,}6923 \,.\, 7306{,}96}{13490{,}48} = -2{,}1746,$$

$$\alpha_2 = 20{,}0746 - \frac{68{,}6667 \,.\, 2877{,}60}{13490{,}48} = 5{,}4276.$$

Das Interstitium

$$\varepsilon = (d_1 + d_2) - (\alpha_2 - \alpha_1) = 8 - 7{,}6022 = 0{,}3978.$$

Die falschen Brennweiten der hintern Linsenfläche und der vordern Hornhautfläche sind nach (95) und (96)

$$S_3 U_\alpha = -D \cdot \frac{f}{\alpha_1} = -8 \cdot \frac{-15{,}0072}{-2{,}1746} = -55{,}2092,$$

$$S_1 U_\beta = D \cdot \frac{\varphi}{\alpha_2} = 8 \cdot \frac{20{,}0746}{5{,}4276} = 29{,}5890.$$

Der falsche Brennpunct der hintern Linsenfläche liegt demnach $47{,}2092^{mm}$ vor der Hornhaut und der falsche Brennpunct der Vorderfläche der Hornhaut $21{,}5890^{mm}$ hinter der hintern Linsenfläche, also 6,9420 hinter der Retina eines auf sehr entfernte Objecte accommodirten Auges.

Wenn das ganze Auge oder das vorne von Luft, hinten von Glasfeuchtigkeit begrenzte System $S_1 S_3$ also einen imaginären

Brechungsindex hätte, so müsste nahezu gemäss der Bedingungsgleichung (97) sein

$$\alpha_1 r_3 + fD = \alpha_2 r_1 - \varphi D$$

oder

$$D(f + \varphi) = \alpha_2 r_1 - \alpha_1 r_3,$$

was beim Auge nicht der Fall ist, da die linke Seite 40,54, die rechte 30,37 beträgt.

Dieselbe Bedingung wird aber nahezu erfüllt von dem System $S_2 S_3$, d. i. der Krystalllinse, wie in einem späteren Abschnitte gezeigt werden wird.

Wir stellen die gewonnenen Daten tabellarisch zusammen, indem wir Helmholtz folgend unter *Ort* eines der Puncte seine Entfernung von der Vorderfläche der Hornhaut verstehen.

Dimensionen und Puncte:	*mm.*
Angenommen von Listing:	
Krümmungsradius der vorderen Hornhautfläche . . .	8,0
- - - Linsenfläche	10,0
- - hinteren Linsenfläche	— 6,0
Ort der vorderen Linsenfläche	4,0
- - hinteren -	8,0
Brechungsindex der wässrigen und gläsernen Substanz	$^{103}/_{77}$
- - Krystalllinse	$^{16}/_{11}$
Berechnet:	
Vordere Brennweite der Hornhaut	— 23,6923
Hintere - - -	31,6923
Brennweite der Linse im Glaskörper	43,7965
Abstand des ersten Hauptpuncts der Linse von ihrer Vorderfläche	2,3462
Abstand des zweiten Hauptpuncts der Linse von ihrer Hinterfläche	— 1,4077
Interstitium dieser Hauptpuncte	0,2461
Erste Hauptbrennweite des Auges	— 15,0072
Zweite - - -	20,0746
Ort des ersten Hauptbrennpunctes	— 12,8326
- - - Hauptpunctes	2,1746
- - zweiten -	2,5724
- - ersten Knotenpunctes	7,2420
- - zweiten -	7,6398
- - - Hauptbrennpunctes	22,6470
- - falschen Brennpunctes der hintern Linsenfläche	— 47,2092
- - - - der Hornhaut	29,5890
Krümmungsradius der Netzhautfläche	— 12,0
- des Netzhautbildes einer verticalen Ebene	— 15,5
Abstand des mittleren Knotenpunctes von der Netzhaut	— 15,2

Ueber die drei zuletzt hinzugefügten Daten wird weiter unten abgehandelt.

§ 43. **Helmholtz's schematische Augen in der Accommodation für die Ferne und Nähe.***) Die Accommodation wird insgemein erklärt, wie in der Beschreibung des Auges auseinandergesetzt worden ist, durch eine Aenderung der Gestalt der Linse, wenn das Auge Objecte aus verschiedenen Entfernungen betrachtet. Bei der *camera obscura,* mit welcher das Auge am besten verglichen wird, geschieht zum Entwurf eines deutlichen Bildes auf der hinteren Wand die Accommodation durch Verschiebung des Linsensystems in der Richtung der optischen Axe. Helmholtz hat die Veränderungen der Krystalllinse in diesen verschiedenen Zuständen gemessen und gefunden, dass bei der Accommodation auf naheliegende Objecte die Krümmungsradien der Linsenflächen abnehmen und die Dicke der Linse zunimmt. Er gibt die Dimensionen von zwei solchen schematischen Augen an, indem er zum Theil die Angaben von Listing beibehält, und die daraus berechneten optischen Constanten. Wir wollen die nöthigen Rechnungen mittels der Methode der Kettenbruchfunctionen vornehmen.

A. *Accommodation des Auges für die Ferne:*

1) Brechungsindex des Kammerwassers und Glaskörpers $= \frac{103}{77}$
2) - der Krystalllinse . . . . $= \frac{16}{11}$
3) Krümmungshalbmesser der Hornhautfläche . . . $= 8{,}0^{mm}$
4) - - vorderen Linsenfläche . $= 10{,}0^{mm}$
5) - - hinteren - . $= -6{,}0^{mm}$
6) Dicke der wässrigen Feuchtigkeitsschicht . . . . $= 3{,}6^{mm}$
7) - - Krystalllinse . . . . $= 3{,}6^{mm}$.

Zur Berechnung der Cardinalpuncte dienen uns wieder die Formeln

$$(56)\qquad f = \frac{f_1 f_2 f_3}{(f_2 - \varphi_1 + d_1)(f_3 + d_2) + \varphi_2(\varphi_1 - d_1)} = \frac{f_1 f_2 f_3}{N_1},$$

$$(58)\qquad \varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{(f_2 - \varphi_1 + d_1)(f_3 + d_2) + \varphi_2(\varphi_1 - d_1)} = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{N_1},$$

$$(59)\qquad \alpha_1 = -f_1 \frac{f_2 d_2 + (f_3 - \varphi_2 + d_2) d_1}{N_1},$$

$$(60)\qquad \alpha_1 = \varphi_3 \frac{\varphi_2 d_1 - (f_2 - \varphi_1 + d_1) d_2}{N_1}.$$

Hierin sind nun folgende Zahlenwerthe zu substituiren:

$$f_1 = -23{,}6923,\quad f_2 = -114{,}4444,\quad f_3 = -74{,}6667,$$
$$\varphi_1 = 31{,}6923,\quad \varphi_2 = 124{,}4444,\quad \varphi_3 = 68{,}6667,$$
$$d_1 = 3{,}6,\quad d_2 = 3{,}6.$$

*) Physiol. Optik § 12.

Man findet nun

$$N_0 = 7429{,}35,\quad N_1 = 13625{,}54,\quad N_2 = 2982{,}80,$$

und mittels dieser Werthe endlich

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3}{N_1} = -14{,}8585,\quad \varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{N_1} = 19{,}8756,$$

$$\alpha_1 = \frac{f_1(f_2 f_3 - N_0)}{N_1} = -1{,}9403,\quad \alpha_2 = \frac{\varphi_3(\varphi_2 \varphi_1 - N_2)}{N_1} = 4{,}8437,$$

$$\varepsilon = 7{,}2 - (4{,}8437 + 1{,}9403) = 0{,}4160.$$

Die Brennweite der Krystalllinse im Glaskörper ist

$$f' = \frac{f_2 f_3}{f_3 - \varphi_2 + d_2} = -43{,}7070^{mm},\quad \varphi' = 43{,}7070^{mm}.$$

Die Abstände $\alpha_{2,1}$ und $\alpha_{2,2}$ der Linsenflächen von den Hauptpuncten der Linse sind gemäss (21) und (24)

$$\alpha_{2,1} = \frac{-f_2 d_2}{f_3 - \varphi_2 + d_2} = -2{,}1073,$$

$$\alpha_{2,2} = \frac{-\varphi_3 d_2}{f_3 - \varphi_2 + d_2} = 1{,}2644.$$

Die falschen Brennweiten der Hornhaut und der Hinterfläche der Krystalllinse sind

$$S_1 U_\beta = D\,\frac{\varphi}{\alpha_2} = 29{,}5445,$$

$$S_3 U_\alpha = -D\,\frac{f}{\alpha_1} = -55{,}1363.$$

Der falsche Brennpunct U_α der hinteren Linsenfläche liegt demnach $47{,}9363^{mm}$ vor der Hornhaut und der der vorderen Hornhautfläche $22{,}3445^{mm}$ hinter der hinteren Linsenfläche, oder $7{,}3126^{mm}$ hinter der Retina des auf sehr entfernte Objecte accommodirten Auges.

Die tabellarische Zusammenstellung der gewonnenen Daten folgt weiter unten. Helmholtz nimmt nun ferner an:

B. *Accommodation des Auges für die Nähe:*

1) und 2) die Brechungsindices wie bei Listing.
3) Krümmungsradius der Hornhaut . . . . $= 8{,}0^{mm}$
4) - - vorderen Linsenfläche $= 6{,}0^{mm}$
5) - - hinteren - $= 5{,}5^{mm}$
6) Dicke der wässrigen Schicht . . . . . $= 3{,}2^{mm}$
7) - - Krystalllinse . . . . $= 4{,}0^{mm}$.

Die Grundlage der Berechnung der Constanten bilden jetzt folgende Zahlenwerthe:

$$f_1 = -23{,}6923,\quad f_2 = -68{,}6667,\quad f_3 = -68{,}4444,$$
$$\varphi_1 = 31{,}6923,\quad \varphi_2 = 74{,}6667,\quad \varphi_3 = 62{,}9444,$$
$$d_1 = 3{,}2,\quad d_2 = 4{,}0.$$

Man findet dann weiter

$$N_0 = 3980{,}03, \quad N_1 = 8388{,}78, \quad N_2 = 1738{,}79$$

und hieraus

$$f = -13{,}2737^{mm}, \quad \varphi = 17{,}7557^{mm},$$
$$\alpha_1 = -2{,}0330^{mm}, \quad \alpha_2 = 4{,}7081^{mm},$$
$$\varepsilon = 0{,}4589^{mm}.$$

Die Brennweite der Linse im Glaskörper ist

$$\varphi' = \frac{-\varphi_2\varphi_3}{f_3 - \varphi_2 + d_2} = 33{,}7849.$$

Die Abstände der Linsenflächen von den Hauptpuncten der Linse sind

$$\alpha_{2,1} = -1{,}9745, \quad \alpha_{2,2} = 1{,}8100,$$

und die falschen Brennweiten der Hornhaut und der hintern Linsenfläche

$$S_1 U_\beta = 27{,}1534, \quad S_3 U_\alpha = -47{,}0097.$$

Darnach liegt der erstere $19{,}9534^{mm}$ hinter der hintern Linsenfläche und der andere $39{,}8097^{mm}$ vor der Hornhaut.

Wir stellen nun die gewonnenen Constanten für die beiden schematischen Augen zusammen, wobei wiederum unter *Ort* eines Punctes seine Entfernung von der Vorderfläche der Hornhaut verstanden werden soll.

Dimensionen und Puncte:	accomm. au loin.	accomm. de près.
Angenommen von Helmholtz:	mm	mm
Krümmungsradius der Hornhaut	8,0	8,0
- - vorderen Linsenfläche	10,0	6,0
- - hinteren -	— 6,0	— 5,5
Ort der vorderen Linsenfläche	3,6	3,2
- - hinteren -	7,2	7,2
Brechungsindex des Kammerwassers und Glaskörpers	$^{103}/_{77}$	$^{103}/_{77}$
Brechungsindex der Krystalllinse	$^{16}/_{11}$	$^{16}/_{11}$
Berechnet:		
Vordere Brennweite der Hornhaut	— 23,6923	— 23,6923
Hintere - -	31,6923	31,6923
Brennweite der Linse im Glaskörper . . .	43,7070	33,7849
Abstand des ersten Hauptpunctes der Linse von ihrer Vorderfläche	2,1073	1,9745
Abstand des zweiten Hauptpunctes der Linse von ihrer Hinterfläche	— 1,2644	— 1,8100
Interstitium dieser Hauptpuncte	0,2283	0,2155
Erste Hauptbrennweite des Auges	— 14,8585	— 13,2737

Dimensionen und Puncte:	accomm. au loin.	accomm. de près.
	mm	mm
Zweite Hauptbrennweite des Auges	19,8756	17,7557
Ort des ersten Hauptbrennpunctes F . . .	— 12,9182	— 11,2417
- - - Hauptpunctes H_α	1,9403	2,0330
- - zweiten - H_β	2,3563	2,4919
- - ersten Knotenpunctes K_α	6,9574	6,5150
- - zweiten - K_β	7,3734	6,9739
- - - Hauptbrennpunctes Φ . .	22,2319	20,2476
- - falschen Brennpunctes der hinteren Linsenfläche	— 47,9363	— 39,8097
Ort des falschen Brennpunctes der Hornhaut	29,5445	27,1534
Krümmungsradius des Netzhautgrundes . .		
- - Netzhautbildes senkrechter Ebenen	— 12,0 — 15,5	— 12,0 — 14,2
Abstand des mittleren Knotenpunctes von der Retina	— 15,0	— 14,5

Von den Bildern, welche von äusseren Objecten auf der Retina entworfen worden. — Reducirtes Auge. Vermittels der berechneten Oerter des Cardinalpunctes eines Auges, deren Lage in Fig. 55 verzeichnet ist, ist es nun leicht nach den bekannten Methoden sowol die Richtung der in das Auge einfallenden Lichtstrahlen nach der Brechung im Glaskörper, als auch die Grösse und Lage des Bildes eines in der Nähe der Augenaxe befindlichen Objects zu construiren und zu berechnen. § 44.

Man kann die specielle Lösung dieser Aufgaben noch bedeutend vereinfachen, wenn man nach dem Vorschlage von Listing an die Stelle des dioptrischen Systems eine einfache brechende Fläche setzt, welche er mit dem Namen *reducirtes Auge* bezeichnet. In Berücksichtigung des Umstandes nämlich, dass die Hauptpuncte einerseits und die Knotenpuncte andrerseits sehr nahe zusammenliegen, kann man, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, diese Punctpaare in je *einen* Punct zusammenziehen und die strahlenbrechende Wirkung des Auges ansehen als hervorgebracht durch eine einzige brechende Fläche, deren Centrum im mittleren Knotenpuncte und deren Scheitelpunct im mittleren Hauptpuncte liegt, während vor der Fläche Luft und hinter derselben Glaskörper befindlich sind. Da der Ort des mittleren Knotenpunctes 7,4409^{mm} beträgt, so fällt der Krümmungsmittelpunct der Hornhaut mit demselben nahe zusammen und die Vorderfläche des reducirten Auges würde dann eine mit der Hornhaut concentrische Kugeloberfläche sein.

Listing bestimmt nun genauer den Ort des mittleren Knoten-

punctes und den Krümmungsradius der hypothetischen Fläche so, dass die beiden Hauptbrennpuncte feste Puncte bleiben und das hinter dem reducirten Auge gelegene Medium mit dem Kammerwasser oder dem Glaskörper gleiches Brechungsvermögen besitzt. Dadurch genügt das reducirte Auge den wichtigsten Anforderungen, wenn auch nicht allen in aller Strenge. Indessen bleibt es immer möglich, noch eine neue Bedingung zu erfüllen, wenn man den angenommenen Brechungsindex fallen lässt.

Nach den Constanten des schematischen Auges von Listing ist nun

$$F\Phi = -f + \varphi + \varepsilon = 35{,}4796^{mm};$$

also wenn f' und φ' die Brennweiten des reducirten Auges bezeichnen,

$$-f' + \varphi' = \frac{n+1}{n-1} r = 35{,}7496^{mm}; \; n = \frac{103}{77}.$$

Hieraus findet man $r = 5{,}1248^{mm}$. Um ferner den Ort von H zu erhalten, berechne man f' aus $f' = -r : (n-1)$. Dies gibt

$$f' = -15{,}1775^{mm}.$$

Es ist also

$$S_1 H = FH - FS_1 = 15{,}1775 - 12{,}8327 = 2{,}3448.$$

Der Ort des Punctes H ist also 2,3448 und der des Punctes K gleich $2{,}3448 + 5{,}1248 = 7{,}4696$. Der mittlere Hauptpunct liegt also zwischen den Hauptpuncten; der mittlere Knotenpunct zwischen den Knotenpuncten. Der mittlere Knotenpunct K liegt $0{,}5304^{mm}$ vor der Hinterfläche der Linse, nicht aber (wie Helmholtz und Wüllner angeben) $0{,}4764^{mm}$.

Es sollen nun noch diese Constanten für die reducirten schematischen Augen von Helmholtz berechnet werden.

a. *Das reducirte Auge in der Accommodation für die Ferne.*

$$F\Phi = -f + \varphi + \varepsilon = 35{,}1501.$$

$$-f' + \varphi' = \frac{n+1}{n-1} r = 35{,}1501; \; r = 5{,}0772^{mm}.$$

$$f' = -15{,}0364; \; S_1 H = 2{,}1182.$$

Der Scheitelpunct H der hypothetischen Fläche liegt $2{,}1182^{mm}$ hinter der Hornhautfläche, der Krümmungsmittelpunct K $7{,}1954^{mm}$ hinter der Hornhautfläche und $0{,}0046^{mm}$ vor der Hinterfläche der Linse; fällt also in sie hinein. Es liegt nämlich der zweite Knotenpunct des ersten systematischen Auges im Glaskörper.

b. *Das reducirte Auge in der Accommodation für die Nähe.*

$$F\Phi = -f + \varphi + \varepsilon = 31{,}4893.$$

$$-f' + \varphi' = \frac{n+1}{n-1} r = 31{,}4893; \; r = 4{,}5484^{mm}.$$

$$f' = -13{,}4704; \; S_1 H = 2{,}2287.$$

Der Ort des Scheitelpunctes H ist demnach $2{,}2287^{mm}$, der des Centrums K gleich $6{,}7771^{mm}$. Der mittlere Knotenpunct liegt also $0{,}4229^{mm}$ vor der Hinterfläche der Linse.

Gegen die Annahme des reducirten Auges von Listing können verschiedene Einwände erhoben werden.

Erstlich setzt die Substitution einer einzigen brechenden Fläche voraus, dass für die Scheitelebene, sowie für den Krümmungsmittelpunct derselben eine Symptose von Object und Bild stattfinde, was bei dem Listing'schen Auge beides nicht der Fall ist, so lange man für den imaginären Brechungsindex willkürliche Werthe wählt.

Zweitens ist es ungerechtfertigt, anzunehmen, dass das Centrum K für den Durchkreuzungspunct der Richtungslinien des Sehens gelten könne. Denn bei einem für die Ferne accommodirten Auge gehen diese durch den zweiten Knotenpunct.

Da nun die Annahme des imaginären Brechungsindex des reducirten Auges willkürlich ist, so lässt sich die Annahme eines *reducirten* Auges noch modificiren, indem man die symptotischen Puncte oder den zweiten Einwand gegen das Listing'sche reducirte Auge berücksichtigt.

Zuerst möge geprüft werden, ob die symptotischen Puncte des Auges den gestellten Anforderungen besser genügen. Nach den Deductionen in § 33 entspricht zwar die vordere Symptose theilweise der substituirten brechenden Fläche, dagegen noch weniger als der Listing'sche Punct K die hintere Symptose der Annahme des zugehörigen Krümmungsmittelpunctes, weil durch sie die Lichtstrahlen nicht ungebrochen weiter gehen.

Wir wollen zunächst die Oerter der beiden Symptosen nach den Formeln in § 33 berechnen. Für Listing's schematisches Auge ist $f = -15{,}0072$, $\varphi = 20{,}0746$, $\varepsilon = 0{,}3978$ und

$$\frac{f}{v} + \frac{\varphi}{v - \varepsilon} = 1,$$

wo v den Abstand der Symptosen vom ersten Hauptpuncte bezeichnet. Durch Substituiren der Zahlenwerthe erhält man nun

$$v_0 \text{ und } v_1 = 2{,}7328 \pm 3{,}6664.$$

Der Ort der vorderen Symptose ist also $1{,}2407^{mm}$ und hierher hätten wir die hypothetische Fläche zu verlegen. Der Ort der hinteren Symptose ist $8{,}5735^{mm}$. Die erste Symptose liegt also vor dem ersten Hauptpuncte und die zweite ebensoweit hinter dem zweiten Knotenpuncte. Ist n der imaginäre Brechungsexponent des reducirten Auges, und r Krümmungsradius, so ist

$$f_1 = -15{,}0072 - v_0 = -14{,}0734 = \frac{-r}{n-1}$$

$$\varphi_1 = 35{,}4796 - 14{,}0734 = 21{,}4062 = \frac{nr}{n-1}.$$

Hieraus folgt $n = 1{,}5210$ und $r = 7{,}3328$. Der Ort des Krümmungsmittelpunctes ist genau gleich dem Orte der hinteren Symptose.

Gegen die Zulässigkeit der Annahme dieses reducirten Auges spricht, dass Object und Bild in der Fläche zwar symptotisch aber von ungleicher Grösse sind und dass sie gegen den Krümmungsmittelpunct perspectivisch gelegen sein müssten, was in Wirklichkeit nur mit Bezug auf einen zwischen den Knotenpuncten gelegenen Punct der Fall ist.

Man muss deshalb von den Symptosen absehen, und es bleibt nur übrig noch anzunehmen, dass der zweite Knotenpunct Krümmungsmittelpunct des reducirten Auges sei, und dazu r und n zu bestimmen. Es ist nun

$$F\Phi = -f + \varphi + \varepsilon = 35{,}4796 = \frac{n+1}{n-1}\,r$$

$$-\,15{,}0072 = -\,\frac{r}{n-1}.$$

Daraus findet man die Werthe

$$n = 1{,}3642 = \frac{177}{77}, \quad r = 5{,}4655.$$

Der Ort des Scheitelpunctes der Fläche ist dann $= 2{,}1746$ und also identisch mit dem ersten Hauptpuncte.

Ein solches reducirtes Auge würde in jeder Beziehung den Anforderungen am besten entsprechen. Für Object und Bild würden darnach die Coordinatengleichungen lauten:

$$\frac{-\,15{,}0072}{x_0} + \frac{20{,}4724}{x_1} = 1;$$

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{15{,}0072 + x_0}{15{,}0072} = \frac{20{,}4724\,x_0}{15{,}0072\,x_1}.$$

Für das systematische Auge mit zwei Coordinatenanfangspuncten lauten diese Formeln:

$$\frac{-\,15{,}0072}{x_0} + \frac{20{,}0746}{x_1} = 1.$$

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{15{.}0072 + x_0}{15{,}0072} = \frac{20{,}0746\,x_0}{15{,}0072\,x_1}.$$

Es mögen nun auch noch die Reductionen der beiden systematischen Augen ausgeführt werden. Wir haben

$$F\Phi = -\,f + \varphi + \varepsilon = 35{,}1501 = \frac{n+1}{n-1}\,r;$$

$$14{,}8585 = \frac{r}{n-1}.$$

Daraus findet man $n = 1{,}3656$ und $r = 5{,}4331$. Der Ort des Scheitelpuncts ist der erste Hauptpunct.

Für das auf nahe Objecte accommodirte Auge können wir ebenso ohne einen merklichen Fehler zu begehen, den zweiten Knotenpunct zum Centrum des reducirten Auges wählen. Wir haben dann

$$F\Phi = -f + \varphi + \varepsilon = 31{,}4883 = \frac{n+1}{n-1}\,r;$$

$$13{,}2737 = \frac{r}{n-1}.$$

Daraus findet man $n = 1{,}3721$ und $r = 4{,}9409$. Der Ort des Scheitelpuncts ist $2{,}0330^{mm}$ also gleich dem des ersten Hauptpuncts. Für das zweite reducirte Auge ist also sowol die Krümmung als das Brechungsvermögen grösser. Dasselbe stimmt nahezu mit dem der Hornhautsubstanz überein.

Ist nun für eine bestimmte Accommodation des Auges der Ort des Knotenpunctes berechnet, so findet man den Ort des Bildes eines leuchtenden Punctes L auf der Retina, wenn man vom Puncte L eine Gerade durch K bis zum Netzhautpuncte L_1 zieht. Diese Gerade heisst die *Richtungslinie des Sehens.* Der Knotenpunct ist der Kreuzungspunct aller dieser Richtungslinien, deren es so viele gibt als leuchtende Puncte angenommen werden. Sämmtliche Puncte des Bildes sind mit den homologen Puncten des Objects perspectivisch gegen K gelegen.

Von Helmholtz wird auf Grund genauer Messungen noch unterschieden zwischen der optischen oder *Augenaxe* $F\Phi$ (Fig. 55) und der *Gesichtslinie*, d. h. der Richtungslinie $F'\Phi'$ desjenigen Strahles, welcher die Mitte des gelben Fleckes, den Ort der directen Gesichtswahrnehmung auf der Retina trifft. Genau genommen geht sie wie alle anderen Richtungslinien durch die beiden Knotenpuncte in zwei gesonderten parallelen Aesten. Der erste vordere Ast liegt etwas nach oben und innen von der Augenaxe, der zweite hintere Ast, welcher gegen die Netzhautgrube gerichtet ist, etwas nach unten und aussen von der Axe. Die Horizontalprojection dieser Declination der Gesichtslinien beträgt etwa 6^0.

Wir haben in diesem Paragraphen angenommen, dass das Auge immer auf die jedesmalige Entfernung des Objects, welches es betrachte, accommodirt sei, so dass das Bild gerade auf die Retina falle. Aus den Abscissengleichungen für ein Object und sein Bild, nämlich

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

auf den Hauptpunct H, oder

$$\frac{(-\varphi)}{k_0} + \frac{(-f)}{k_1} = 1$$

auf den Knotenpunct K bezogen, folgt nun aber, dass für Objecte grösserer Entfernungen x_0 oder k_0 die Bilder im Glaskörper vor der Retina, für Objecte kleinerer Entfernungen die Bilder hinter der Retina liegen. Liegt das Bild auf der Retina, so bildet jeder Punct desselben die Spitze eines Strahlenkegels, welcher durch die kreis-

förmige Pupille begrenzt, in das innere Auge dringt; liegt die Spitze des Lichtkegels vor oder hinter der Retina, so entsteht auf dieser ein heller Kreis (Zerstreuungskreis), dessen Grösse sich berechnen lässt, wie später gezeigt werden soll.

§ 45. **Von der Krümmung der Netzhautbilder verglichen mit der Krümmung des Netzhautgrundes.** Die Grösse der Krümmung des Hintergrundes der Retina, welche nahezu sphärisch ist, nach Messungen von Krause ellipsoidisch sein soll, ist ohne Zweifel von Bedeutung für die Bilder äusserer Objectflächen, welche, wenn diese senkrecht gegen die optische Axe liegen, eine bestimmte Krümmung haben. Wir haben früher in § 18 die Beziehung zwischen den Krümmungsradien der Object- und Bildfläche für ein dioptrisches System abgeleitet; sie lautet (17)

$$\frac{\varphi_1}{\varrho_1} + \frac{f_1 f_2 \cdots f_m (-1)^{m-1}}{\varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_m \cdot \varrho_{m+1}} = 1 - \frac{f_1}{\varphi_2} + \frac{f_1 f_2}{\varphi_2 \varphi_3} - \cdots$$

oder wenn man die beiden Hauptbrennweiten einführt,

$$\frac{\varphi}{\varrho_1} + \frac{f}{\varrho_{m+1}} = \frac{\varphi}{\varphi_1}\left\{1 - \frac{f_1}{\varphi_2} + \frac{f_1 f_2}{\varphi_2 \varphi_3} - \frac{f_1 f_2 f_3}{\varphi_2 \varphi_3 \varphi_4} + \cdots\right\},$$

worin ϱ_1 den Krümmungsradius der Objectfläche, ϱ_{m+1} den des Bildes bezeichnet.

Es kann die Frage aufgeworfen werden, ob unter bestimmt einfachen Verhältnissen, wenn man also z. B. eine zur Gesichtslinie senkrechte Ebene betrachtet, das Bild derselben sich in allen Theilen dem Netzhautgrunde möglichst genau anschmiege.

Diese Frage, welche auch W. v. Zehender in seiner Dioptrik des Auges aufwirft, aber unbeantwortet lässt, wird von Bedeutung, wenn es sich um Bilder grosser Objecte handelt.

Um den Grad der Uebereinstimmung dieser beiden in Betracht kommenden Krümmungen zu prüfen, nehmen wir an, das Auge sei für die Nähe accommodirt und das Object

a) *eine zur optischen Axe senkrechte Ebene.* In dem angenommenen Falle ist $\varrho_1 = \infty$ und bei drei Flächen

$$\frac{1}{\varrho_4} = \frac{f_1 f_2 - f_1 \varphi_3 + \varphi_2 \varphi_3}{f_1 f_2 f_3}.$$

Nach § 43 B. ist nun

$$f_1 = -23{,}69,\quad f_2 = -68{,}67,\quad f_3 = -68{,}44$$
$$\varphi_1 = 31{,}69,\quad \varphi_2 = 74{,}67,\quad \varphi_3 = 62{,}94.$$

Hieraus ergibt sich $\varrho_4 = -14{,}2^{mm}$. Das Object sei ferner

b) *eine Kugelfläche, deren Centrum im Knotenpuncte liegt und deren Radius* 136^{mm} *beträgt.* Es ist dies die Fläche, welche in der

Entfernung des deutlichen Sehens liegt. Mit Hülfe der vorigen Zahlenwerthe findet man

$$\frac{\varphi}{\varrho_1} + \frac{f}{\varrho_4} = \frac{29,6}{31,7}.$$

Setzt man $\varrho_1 = 136^{mm}$, so findet man durch Auflösung der Gleichung nach ϱ_4 hierfür den Werth $-12,5^{mm}$. Es stimmen demnach in allen Fällen der Accommodation fast genau überein die Krümmungen des Bildes und des Netzhautgrundes.

Das Resultat dieser Untersuchung lautet für das deutliche Sehen von Bildern jedenfalls überaus günstig. Die Physiologen legen, wie ich vermuthen muss, kein grosses Gewicht auf diese Thatsache, weil die Gesichtswahrnehmung in der Nähe der Gesichtslinie überhaupt unvollkommen ist. Dennoch ist dieser Umstand ein überraschender und der Beachtung wol werth.

Die Augenbilder und scheinbaren Oerter der Linsenfläche und der Pupille. In vielen Fällen, namentlich bei ophthalmologischen Untersuchungen ist es von Wichtigkeit den Ort und die Grösse der Bilder der inneren Theile des Auges zu kennen, vornehmlich der Bilder der Iris (Pupille) und der beiden Linsenflächen. Da der innere Rand der Iris dicht an der Vorderfläche der Linse anliegt und der Ort des Scheitels der Vorderfläche der Linse sich aus ihrem Krümmungsradius und dem Durchmesser der Pupille berechnen lässt, so reducirt sich die Aufgabe auf die Untersuchung der Bilder zweier Objecte, nämlich der Pupille und der Hinterfläche der Linse. Jedes dieser Objecte hat so viele Bilder als brechende Flächen vorhanden sind, also mindestens *drei*. Da indess die Pupille auf der Vorderfläche der Linse aufliegt und der Scheitelpunct der Hinterfläche zugleich sein eignes Bild (Symptose) ist, so reducirt sich die Anzahl der wirklichen Bilder beider Objecte auf *zwei*. Die Strahlen der vordersten oder Hornhautbilder treten ungebrochen aus dem Auge nach vorne aus. Man nennt diese Bilder deshalb die *scheinbaren Oerter* der Objecte und unterscheidet zwischen der *scheinbaren* und *wahren Pupille*. Von den hinteren Bildern kommt besonders das Linsenbild der Pupille in Betracht, indem von seiner Lage und Grösse die Dimensionen und Oerter der sogenannten Zerstreuungskreise auf der Retina abhängig sind. Wir berechnen unter Zugrundelegung der Daten des systematischen Auges § 46.

1) *Lage und Grösse der beiden Bilder der Pupille.* Es seien S_1 (Fig. 56) der Scheitel der Hornhaut, S_2 der der vorderen Linsenfläche oder das Centrum der Pupille, S_3 der Scheitel der hinteren Linsenfläche und Pp die Oeffnung der wahren Pupille. Ferner seien F und Φ die Hauptbrennpuncte des auf die Ebene OO_1 accommodirten Auges, K der Knotenpunct, M der Drehpunct, RR_4 die Scheitel-

ebene der Retina. Endlich möge $P_1 p_1$ das vordere oder Hornhautbild (scheinbare Pupille) und $P_2 p_2$ das hintere oder Linsenbild von Pp sein, also entworfen von der hinteren Linsenfläche von S_3.

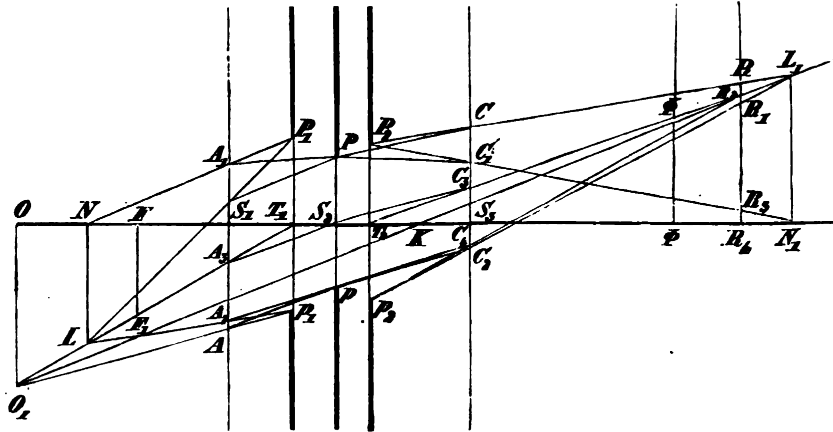


Fig. 56.

Legen wir unserer Berechnung die Daten des systematischen Auges von Listing zu Grunde, welches für die Ferne accommodirt ist, so liegt OO_1 im Unendlichen und die Focalebene $\Phi\Phi_1$ fällt mit der Retina $R_2 R_4$ zusammen.

Um die Lage des Hornhautbildes $P_1 p_1$ zu erhalten, gehen wir aus von der Abscissengleichung conjugirter Puncte bezüglich des Punctes S_1,

$$\frac{f_1}{s_0} + \frac{\varphi_1}{s_1} = 1,$$

wo s_1 die wahre, s_0 die scheinbare Entfernung der Pupille von der Hornhaut bezeichnet. Nun ist

$$r_1 = 8^{mm}, \quad n_1 = \frac{103}{77}, \quad f_1 = -\frac{8.77}{26}, \quad \varphi_1 = \frac{8.103}{26},$$
$$s_1 = 4^{mm}.$$

Hieraus findet man $s_0 = 3{,}4222^{mm}$ und folglich erscheint die Pupille um $0{,}5778^{mm}$ nach vorne gerückt*).

Die Lage des Linsenbildes erhalten wir aus der Abscissengleichung conjugirter Puncte bezüglich des Scheitelpunctes S_3,

$$\frac{f_3}{s_4} + \frac{\varphi_3}{s_5} = 1,$$

wo s_4 die wahre, s_5 die scheinbare Entfernung der Pupille von der hinteren Linsenfläche bezeichnen. Nun ist

$$r_3 = -6^{mm}, \quad n_3 = \frac{103}{112}, \quad f_3 = -\frac{6.112}{9}, \quad \varphi_3 = \frac{6.103}{9},$$
$$s_4 = -4^{mm}.$$

*) Physiol. Opt. § 11. S. 98.

Hieraus findet man $s_5 = -3,8869^{mm}$ und folglich erscheint hier die Pupille um $0,1131^{mm}$ nach hinten gerückt.

Um die Veränderung der Grössen der Pupillenbilder zu erhalten, bezeichnen wir die Ordinate des Punctes P mit Y_1, die des Punctes P_1 mit Y_0, die des Punctes P_2 mit Y_2.

Für das Hornhautbild gilt dann die Gleichung

$$Y_0 : Y_1 = (f_1 - s_0) : f_1 = 103 : 90.$$

Darnach wird durch die Brechung in der Hornhaut die Pupille scheinbar um $^{13}/_{90}$ oder $^1/_7$ vergrössert.

Für das Linsenbild ist

$$Y_2 : Y_1 = f_3 : (f_3 - s_4) = 56 : 53.$$

Durch die hintere Linsenfläche wird die Pupille also auch vergrössert und zwar um $^3/_{53}$ oder $\frac{1}{18}$.

Bei diesen Rechnungen wurde die Wölbung der Linse durch die Pupillenöffnung nicht weiter berücksichtigt. Setzt man den Oeffnungsdurchmesser gleich 4^{mm}, den Krümmungsradius gleich 10^{mm}, so beträgt die Wölbung der Linse $0,25^{mm}$. Da Listing für sein systematisches Auge annimmt, dass die Iris $0,5^{mm}$ vor der Linse liege, so wird man wol keinen merklichen Fehler begehen, wenn man die Ebene der Pupille in die Scheitelebene der vorderen Linsenfläche verlegt.

2) *Lage der beiden Bilder der hinteren Linsenfläche* *). Der wahre Ort des Scheitelpuncts dieser Fläche ist S_3 (Fig. 56). Die Lage des Linsenbildes wird bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{f_2}{s_2} + \frac{\varphi_2}{s_3} = 1, \quad f_2 = -\frac{10.103}{9}, \quad \varphi_2 = \frac{10.112}{9}.$$

Der Abstand s_3 des Punctes S_3 von S_2 beträgt 4^{mm}, der Abstand s_2 des Bildes wird gesucht. Man findet $s_2 = 3,8008^{mm}$. Darnach liegt deshalb $0,2^{mm}$ vor der hintern Linsenfläche.

Die Lage des Hornhautbildes wird bestimmt aus der Gleichung

$$\frac{f_1}{s_0} + \frac{\varphi_1}{s_1} = 1, \quad f_1 = -\frac{8.77}{26}, \quad \varphi_1 = \frac{8.103}{26}.$$

Der Abstand s_0 des Hornhautbildes von S_1 wird gefunden aus dem Abstande s_1 des Linsenbildes von S_1. Derselbe beträgt $7,8^{mm}$ und $s_0 = 7,73^{mm}$. Die hintere Linsenfläche erscheint also im Ganzen um $0,27^{mm}$ nach vorn gerückt.

Die Zerstreuungskreise auf der Retina. — Visirlinien. — Gesichtswinkel. Wir haben uns den Gang verschiedener Lichtstrahlen, mögen sie von innen heraus und von aussen in das System eintreten, § 47.

*) Physiol. Opt. § 10. S. 82 u. 83.

genau zu vergegenwärtigen. Alle Strahlen, welche vor der Hornhaut gegen das Hornhautbild P_1 des Punctes P convergiren, kreuzen sich nach der Brechung im Kammerwasser in dem Rande P der wahren Pupille und verlaufen nach der dritten Brechung im Glaskörper so, als wenn sie vom hinteren, dem Linsenbilde P_2 herkämen. Umgekehrt werden alle Strahlen, welche vom Rande P der wahren Pupille nach vorne gehen, so durch die Hornhaut ins Freie treten, als wenn sie aus P_1 der scheinbaren Pupille herkämen.

Es werden nun weiter von den Puncten O und O_1 die Bilder R_4 und R_2 auf der Retina entworfen. In R_2 kreuzen sich die Strahlen $O_1 K R_2$, $O_1 A_3 S_2 C_3 R_2$ und $O_1 A p C_4 R_2$. Unter diesen drei Strahlen fällt der erste mit der Richtungslinie des Sehens zusammen; der zweite vom leuchtenden Puncte O_1 aus gegen das Centrum T_1 der scheinbaren Pupille gerichtete Strahl wird im Glaskörper so gebrochen, als wenn er aus dem Centrum T_2 des Linsenbildes $P_2 p_2$ der Pupille käme, der dritte Strahl $O_1 A p_1$ passirt die unteren Ränder der drei Pupillenbilder und convergirt ebenfalls gegen R_2, weil das Auge auf die Ebene $O O_1$ accommodirt ist.

Denken wir uns die Gerade $T_2 R_2$ hinter der Retina verlängert, so ist offenbar einerseits die unendliche Verlängerung $R_2 L_1$ der geometrische Ort der Bilder aller zwischen O_1 und F_1 auf der Geraden $O_1 T_1$ gelegenen leuchtenden Puncte, andrerseits die Gerade $R_2 \Phi_1$ der geometrische Ort aller auf der unendlichen Verlängerung der Geraden $T_1 O_1$ gelegenen leuchtenden Puncte. Ist L ein solcher leuchtender Punct, L_1 sein Bild, so tritt in das Auge der Lichtkegel $L P_1 p_1$ ein und verändert sich durch Brechung in den Lichtkegel $P_2 L_1 p_2$. Da nun $T_2 P_2 = T_2 p_2$ ist, so ist auch $R_2 R = R_2 R_1$; die Basis $P_2 p_2$ das ganzen Kegels ist kreisförmig; mithin ist der Parallelschnitt $R R_1$ auch kreisförmig. Dieser Kreis stellt auf der Retina eine helle Fläche dar und wird der *Zerstreuungskreis* genannt. Aus der angestellten Betrachtung geht zugleich hervor, dass die Zerstreuungskreise sämmtlicher auf der Geraden $T_1 L$ gelegenen leuchtenden Puncte concentrisch sind. Die Linie $T_1 L$ wird deshalb *Visirlinie* genannt. Alle Visirlinien kreuzen sich in T_1, dem Centrum der scheinbaren Pupille.

Um die Grösse des Zerstreuungskreises für die Lichtstrahlen irgend eines leuchtenden Punctes L zu bestimmen, betrachten wir die geometrischen Verhältnisse des Lichtkegels $P_2 L_1 p_2$ und seiner Schnitte in S_3 und R_4. Es folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, worin die Abschnitte liegen:

$$\frac{P_2 L_1}{R L_1} = \frac{P_2 p_2}{R R_1} = \frac{T_2 N_1}{R_4 N_1}.$$

Wenn wir den Radius $R_2 R_1$ des Zerstreuungskreises gleich ϱ

und die Weite des Linsenbildes $P_2 p_2$ mit b_2 bezeichnen, so wird

$$2\varrho = \frac{b_2 \cdot R_4 N_1}{T_2 N_1}.$$

Indem wir wiederum annehmen, dass das Auge auf einen unendlich entfernten Punct accommodirt sei, also der zweite Hauptbrennpunct Φ mit R_4 coincidire, können wir die Abscissen der conjugirten Puncte N und N_1 von den beiden andern conjugirten Puncten T_1 und T_2 abrechnen. Bezeichnen wir demnach $T_1 F$ mit f', $T_2 \Phi$ mit φ', $T_1 N$ mit t_0 und $T_2 N_1$ mit t_1, so ist gemäss § 14:

$$\frac{f'}{t_0} + \frac{\varphi'}{t_1} = 1.$$

Da nun $\Phi N_1 = T_2 N_1 - T_2 \Phi = t_1 - \varphi'$ ist, so wird

$$\frac{f'}{t_0} = \frac{t_1 - \varphi'}{t_1} = \frac{\Phi N_1}{T_2 N_1}.$$

Vorhin fanden wir

$$2\varrho = b_2 \frac{R_4 N_1}{T_2 N_1} = b_2 \frac{\Phi N_1}{T_2 N_1},$$

folglich ist

$$2\varrho = b_2 \cdot \frac{f'}{t_0}. \qquad (135)$$

Der Strahl LT_1 ist die specielle Visirlinie des Punctes R_2 der Retina; sie ist ausserhalb des Auges gegen das Centrum der scheinbaren Pupille gerichtet, geht innerhalb des Auges durch das Centrum der wahren Pupille und wird an der Hinterfläche der Linse so gebrochen, als wenn er aus dem Centrum des zweiten oder Linsenbildes der Pupille käme. Für hintereinandergelegene Puncte der Gesichtslinie, fällt die Visirlinie mit dieser zusammen; die Visirlinien seitlich gelegener Puncte bilden aber mit der zugehörigen Richtungslinie des Sehens, welche durch den Knotenpunct geht, einen wachsenden Winkel.

Ist nämlich L ein Punct der Visirlinie LT_1, L_1 der conjugirte Punct, so ist LKL_1 die Richtungslinie des Sehens und die Abweichung gleich der Summe der Winkel KLT_1 und KL_1T_2 oder was dasselbe ist, $NT_1L - N_1T_2L_1$. Diese Winkel lassen sich berechnen, wenn KN und NL gegeben sind. Ist L unendlich weit entfernt und das Auge auf L accommodirt, so fallen L_1 und Φ_1 mit R_2 auf der Retina zusammen. Alsdann ist

$$K\Phi = 15^{mm}, \quad KT_2 = 3{,}53^{mm}, \quad KNL = N_1KL_1 = \vartheta,$$
$$\tan N_1T_2L_1 = 15\vartheta : (15 + 3{,}53).$$

Da in dem angenommenen Falle LT_1 parallel LK wird, so ist $NT_1L = \vartheta$.

Wenn also die Visirlinie nicht über 20^0 von der Gesichtslinie abweicht, so beträgt die Abweichung nahezu

$$\delta = \frac{3{,}53}{18{,}53}\,\vartheta \ (\text{nahezu } \tfrac{1}{5}\,\vartheta).$$

Mit den verschiedenen Richtungen der *Augenaxe*, der *Gesichtslinie*, der *Richtungslinie des Sehens* und der *Visirlinie* hängt der Begriff des *Gesichtswinkels* zusammen. Die beiden ersteren Linien sind feste Linien im Auge, welche nur wenige Grade von einander abweichen. Die Richtungslinie des Sehens und die Visirlinie sind verschiedene Verbindungslinien der Netzhautbilder mit den homologen Puncten der Objecte, und geht die erstere durch die Knotenpuncte, die andere durch die Centra der Bilder der Pupille. Die Gesichtslinie ist ein specieller Fall der Richtungslinie des Sehens, wenn nämlich dieses am deutlichsten geschieht. Der Gesichtswinkel ist demnach ebenfalls ein unterschiedener. Ist M (Fig. 57) der feste Drehpunct des Augapfels und erscheinen LL_2 und PA unter gleichem Winkel, wenn man die Gesichtslinien nacheinander durch Drehung des Auges um M direct auf L und L_1 richtet, so ist LML_2 der Gesichtswinkel, der *Winkel des directen Visirens.* Richtet man dagegen die Gesichtslinie nur auf L_2, so erscheint das entferntere Object AP unter einem kleineren Gesicktswinkel als das Object LL_2, dem *Winkel des indirecten Visirens.* Der Scheitel dieses Gesichtswinkels liegt nicht im Drehpunct M, sondern in T_1, dem Kreuzungspuncte der Visirlinien. Liegt endlich irgend ein Object auf der Retina, z. B. ein Zerstreuungskreis oder das Zerstreuungsbild eines nahe vor dem Auge befindlichen Objects, welches man durch eine

Fig. 57.

feine Oeffnung betrachtet, so liegt der Scheitel des Gesichtswinkels im Knotenpuncte K. Für sehr entfernte Objectpaare findet dabei kein Unterschied Statt, wohl aber für nahe.

Von dem Umstande, dass bei dem indirecten Visiren das entferntere Object AP unter einem kleinern Gesichtswinkel erscheint als das Object LL_2, worauf das Auge accommodirt ist, kann man sich leicht durch einen Versuch überzeugen, wenn man in P eine verticale homogene Lichtlinie anbringt und in L von der Seite her

den scharfen Rand einer undurchsichtigen Blende B auf P direct einvisirt. Dreht man dann die Gesichtslinie in die Richtung MA, so tritt das leuchtende Object P deutlich hinter dem Rande hervor und man muss die Blende von L nach P_2 und um die halbe Pupille nach P_3 vorrücken, wenn das Object P wieder verschwinden soll. Man kann auf diese Weise den Ort des Punctes M annähernd bestimmen aus der Grösse von LP_2 und dem Winkel AMP. Ist nämlich P sehr weit entfernt, so ist $T_1 T_0 = P_2 L$ und

$$MT_1 = P_2 L \operatorname{cosec} \vartheta.$$

Für das systematische Auge von Listing beträgt der Abstand MT_1 ungefähr $9{,}5^{mm}$, also für den Winkel 45^0 beträgt $P_2 L$ $6{,}7^{mm}$, was mit meinen Beobachtungen nahe übereinstimmt.

Aus Formel (135) geht nun hervor, dass die Durchmesser der Zerstreuungskreise gleich gross sind für alle Puncte, die in der Nähe der Augenaxe liegen und gleiche Abstände vom Auge haben.

Listing hat aus den Daten seines systematischen Auges eine Tabelle der Durchmesser berechnet unter der Annahme, dass der zweite Hauptbrennpunct in der Netzhaut liege und die Pupille 4^{mm} Oeffnung habe. Wir fanden nun

$$2\varrho = b_2 \cdot \frac{\Phi N_1}{T_2 N_1}.$$

Hierin ist $b_2 = 4 \cdot \frac{56}{53} = 4{,}226$ zu setzen. Bezeichnet man wie früher FN mit ξ_0, ΦN_1 mit ξ_1, so ist

$$\xi_0 \xi_1 = f\varphi = -301{,}26.$$

Es ist nun weiter $T_2 N_1 = T_2 \Phi + \Phi N_1$. Setzt man die Werthe in die Gleichung für den Durchmesser 2ϱ ein, so erhält man

$$2\varrho = b_2 \frac{f\varphi}{T_2\Phi \cdot \xi_0 + f\varphi} = 4{,}226 \cdot \frac{-301{,}26}{18{,}53 \cdot \xi_0 - 301{,}26}.$$

Man kann aber auch gemäss (135) dafür setzen

$$2\varrho = b_2 \cdot \frac{T_1 F}{T_1 F + FN} = 4{,}226 \cdot \frac{16{,}25}{16{,}25 - \xi_0}. \qquad (136)$$

Das Maximum von 2ϱ ist demnach gleich dem Werthe, den dieser Ausdruck annimmt, wenn man für ξ_0 seinen kleinsten Werth einsetzt, wenn also der leuchtende Punct im Scheitel der Hornhaut liegt. In diesem Falle ist $\xi_0 = -12{,}83$ und der Durchmesser des Zerstreuungskreises 20^{mm}. Die Lichtstrahlen treten in einem divergirenden Kegel durch die Pupille ins Auge, dessen Basis sich nahezu zum Durchmesser des Auges verhält, wie die Pupillenweite zum Abstande derselben von der Hornhaut.

In der folgenden Tabelle von Listing bedeutet ξ_0 die Entfernung des leuchtenden Punctes von dem ersten Brennpuncte, ξ_1 die des

Bildpunctes von der Retina oder dem zweiten Brennpuncte, 2ϱ den Durchmesser der Zerstreuungskreise.

ξ_0	ξ_1	2ϱ
∞	$0{,}00^{mm}$	$0{,}0000^{mm}$
-65000^{mm}	$+0{,}005$	0,0011
25000	0,012	0,0027
12000	0,025	0,0056
6000	0,050	0,0112
3000	0,100	0,0222
1500	0,200	0,0443
750	0,400	0,0825
500	0,60	0,1322
375	0,80	0,1616
188	1,60	0,3122
94	3,20	0,5768
88	3,42	0,6484
0	∞	4,226
$+12{,}83$	$-23{,}46$	20,07

Für das schematische Auge von Helmholtz, welches für die Nähe accommodirt ist, ist die Gleichung des Durchmessers 2ϱ

$$2\varrho = b_2 \frac{R_4 N_1}{T_2 N_1} = b_2 \frac{\Phi N_1 - \Phi R_4}{T_2 N_1} = b_2 \frac{T_1 F\left(1 - \frac{\Phi R_4}{f\varphi} FN\right)}{T_1 F + FN}. \quad (137)$$

Für dasselbe Auge ist nun der Ort der scheinbaren Pupille $2{,}66^{mm}$, also $T_1 F = -13{,}90^{mm}$, ΦR_4 oder der Abstand des zweiten Hauptbrennpunctes von der Retina gleich $1{,}984^{mm}$ und $b_2 = 4{,}2$.

Demgemäss ist

$$2\varrho = 4{,}2\,\frac{13{,}90 + 0{,}117\,\xi_0}{13{,}90 - \xi_0}.$$

Bei dem vorhandenen Accommodationszustande sieht dies Auge einen Gegenstand deutlich, welcher $118{,}85^{mm}$ vor dem vorderen Brennpuncte liegt, indem bei der Berechnung der optischen Constanten angenommen ist, dass bei demselben aber accommodationslosen Auge der zweite Hauptbrennpunct auf die Netzhaut falle und der Ort der Netzhaut $22{,}231^{mm}$ bleibe. Für den Werth $\xi_0 = -118{,}85$ wird deshalb auch der Durchmesser des Zerstreuungskreises gleich Null. Einige andere Werthe sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, berechnet nach der Formel

$$\xi_0\,\xi_1 = -235{,}67.$$

ξ_0	ξ_1	2ϱ
∞	$0,000^{mm}$	$-0,491^{mm}$
-47000^{mm}	+ 0,005	0,490
25000	0,006	0,489
12000	0,020	0,485
6000	0,039	0,481
3000	0,078	0,469
1500	0,157	0,448
750	0,314	0,406
500	0,471	0,364
375	0,628	0,324
188	1,253	0,168
118,85	1,984	0,000
94	2,506	+ 0,113
88	2,678	0,149
50	4,713	0,529
0	∞	4,2
+ 11,24	− 20,968	24,0

Von der Helligkeit der Zerstreuungskreise. Bei der Berechnung der Grösse der Zerstreuungskreise wurde vorausgesetzt, dass das Auge oder genauer die Pupille von einem Kegel einfarbigen Lichtes getroffen werde. Ueber die Helligkeit einfarbiger Zerstreuungskreise lassen sich folgende zwei Theoreme aufstellen: § 48.

1. *Wenn ein Lichtkegel von einem einfarbig leuchtenden Punct durch die Pupille geht und die Retina sich vor oder hinter dem Vereinigungspuncte der Strahlen befindet, so wird ein Zerstreuungskreis gebildet, welcher in allen seinen Theilen gleiche Helligkeit hat.*

2. *Sämmtliche Zerstreuungskreise, welche von verschieden weit entfernten leuchtenden Puncten derselben Lichtintensität auf der Retina entworfen werden, besitzen eine gleiche Helligkeit, wenn das Auge für einen unendlich entfernten Punct accommodirt ist.*

3. *Ist das Auge auf den Nahepunct accommodirt, so wird die Helligkeit des Zerstreuungskreises ein Minimum, wenn der leuchtende Punct im Unendlichen liegt und ein Maximum, wenn derselbe in der Accommodationsebene liegt.*

Der erste Satz ergibt sich einfach aus der Bemerkung, dass die Lichtvertheilung vor und hinter jeder brechenden Fläche dieselbe bleibt.

Der zweite Satz lässt sich aus dem allgemeinen Gesetze der Abnahme der Lichtintensität mit dem Quadrate der Entfernung und aus der Formel (136) ableiten.

Bezeichnet man die Lichtmenge, welche von dem im ersten Brenn-

puncte F befindlichen Lichtpuncte durch die scheinbare Pupille ins Auge tritt, mit m, und diejenige Lichtmenge, welche von derselben in N (Fig. 56) befindlichen Lichtquelle ins Auge tritt, mit M, so ist

$$m : M = T_1N^2 : T_1F^2 = (T_1F + \xi_0)^2 : T_1F^2.$$

Die Helligkeiten der beiden Zerstreuungskreise sind

$$i = 4\frac{m}{b_2^2 \pi}, \quad J = \frac{M}{\varrho^2 \pi},$$

folglich ist mit Berücksichtigung von (136)

$$\frac{J}{i} = \frac{1}{4}\frac{M \cdot b_2^2}{m \varrho^2} = 1.$$

Der dritte Satz ergibt sich aus (137). Man erhält in dem angenommenen Falle

$$J : i = 1 : \left(1 - \frac{\Phi R_4}{f \varphi}\xi_0\right).$$

Der Werth von J ist ein Minimum, wenn $\xi_0 = -\infty$ ist, ein Maximum für $\xi_0 = -118{,}85$. J wird gleich i in zwei Fällen, einmal, wenn $\xi_0 =$ Null und wenn es gleich $-237{,}7$ wird. Die Intensitätscurve ist eine Hyperbel, welche in eine Gerade übergeht, wenn ΦR_4 gleich Null wird. Das Intensitätsverhältniss ist für alle Punctpaare gleich, welche gleich weit vom Nahepuncte entfernt sind. Für den einen Punct liegt die Spitze des innern Lichtkegels vor der Retina, für den andern hinter derselben. Setzen wir i gleich der Einheit, so erhält man folgende specielle Werthe

ϱ_0	J
∞	0,000
-10000^{mm}	0,011
1000	0,135
500	0,301
237,7	1,000
200	1,462
118,85	∞
81,15	1,462
0,00	1,000
$+11{,}24$	0,916

§. 49 **Die Bestimmung des Punctes irgend eines der zwei mittleren Medien (Kammerwasser und Krystalllinse), dessen Bilder die beiden Hauptpuncte oder die beiden Knotenpuncte sind.** Die beiden Hauptpuncte H_α und H_β (Fig. 58) des menschlichen Auges liegen im Kammerwasser und die beiden Knotenpuncte K_α und K_β in der Krystalllinse.

Wenn in das Auge Lichtstrahlen eintreten, welche gegen H_α convergiren (virtueller Lichtpunct), so kreuzen sie sich im ersten

Medium in dem Puncte h_1 der Axe, divergiren im zweiten Medium aus h_2, im dritten und letzten Medium aus H_β. Der leuchtende Punct ist virtuell, das erste Bild h_1 reell, das zweite Bild h_2 wieder virtuell und endlich auch das dritte Bild H_β. Sieht man h_1 als den reellen leuchtenden Punct an, so ist der erste Hauptpunct H_α das erste Bild der Brechung an der Hornhaut, der zweite Hauptpunct H_β das letzte Bild der Brechung nach hinten. Der Punct h_1 ist also derjenige Punct im Kammerwasser, dessen Bilder die beiden Hauptpuncte sind.

Wenn ferner Lichtstrahlen in das Auge eintreten, welche gegen den ersten Knotenpunct K_α (Fig. 59) convergiren, so convergiren sie nach der Brechung in dem ersten Medium in k_1, kreuzen sich im zweiten Medium in k_2 und divergiren im dritten Medium, dem Glaskörper aus dem zweiten Knotenpuncte K_β. Der leuchtende Punct ist virtuell, die Bilder mit Ausnahme des zweiten k_2 ebenfalls. Sieht man den Punkt k_2 als den reellen leuchtenden Punct an, so ist das Bild der zweiten Brechung nach vorne (Hornhautbild) der erste Knotenpunct; das Bild der Brechung nach hinten (Linsenbild) der zweite Knotenpunct. Der Punct k_2 ist also derjenige Punct innerhalb der Linse, dessen Bilder die beiden Knotenpuncte sind.

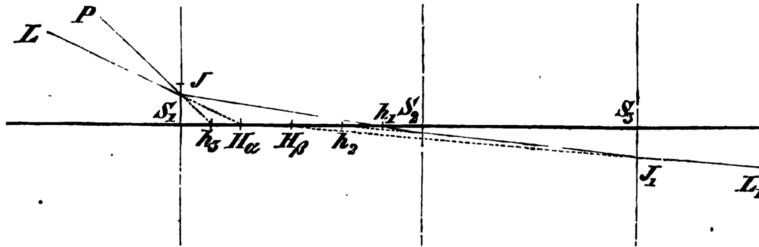


Fig. 58.

Auf diese Weise sind die Licht- und Bildpuncte, worum es sich handelt, vollkommen bestimmt. Um nämlich den Ort eines bestimmten Bildes von einem leuchtenden Puncte sicher bestimmen zu können, ist es nicht genügend, anzugeben, durch welche Fläche das Bild entworfen werden soll, sondern es ist auch erforderlich, die Richtung anzugeben, in welcher die Lichtstrahlen die Fläche durchsetzen. Ist z. B. LJH_α (Fig. 58) die Richtung eines Strahles, der von vorne in das System eintritt, so ist Jh_1 der gebrochene Strahl; ist dagegen $H_\alpha JL$ die Richtung des nach vorne austretenden Strahles, so ist nicht h_1, sondern ein neuer Punct h_3 das Bild von H_α. Dabei sind beide Puncte h_1 sowol als h_3 Hornhautbilder von H_α; es kommt also hauptsächlich darauf an, anzugeben, ob der leuchtende Punct ein reeller oder ein virtueller sein soll. Ist ein virtueller Lichtpunct gemeint und liegen mehrere Medien vor demselben, so gewinnt der-

selbe dadurch noch an Vieldeutigkeit, dass anzugeben ist, in welchem der Medien der reelle Theil des Lichtkegels liegen soll.

Es mögen nun die Oerter der in Rede stehenden Puncte berechnet werden. Die Berechnung kann entweder nach den allgemeinen Methoden oder durch Fortschreiten von Fläche zu Fläche geschehen. Dabei legen wir die Constanten des Listingschen Auges zu Grunde.

a. *Der Punct* h_1. (Fig. 58.) Die Abscissengleichung conjugirter Puncte bezüglich des Scheitelpunctes S_1 der Hornhaut ist

$$\frac{f_1}{s_0} + \frac{\varphi_1}{s_1} = \frac{-77.8}{26\,s_0} + \frac{103.8}{26\,s_1} = 1.$$

Der Abstand s_0 des virtuellen Lichtpuncts H_α von S_1 ist gleich $2{,}1743^{mm}$; woraus folgt $s_1 = S_1 h_1 = 2{,}6640^{mm}$.

b. *Der Punct* h_2. Die Abscissengleichung bezüglich des Scheitelpunctes S_2 der vorderen Linsenfläche ist

$$\frac{f_2}{s_2} + \frac{\varphi_2}{s_3} = \frac{-103.10}{9\,s_2} + \frac{112.10}{9\,s_3} = 1.$$

Nun ist $s_2 = S_2 h_1 = -1{,}3360$, woraus folgt $s_3 = S_2 h_2 = -1{,}4700$.

c. *Der Punct* H_β. Die Abscissengleichung bezüglich des Scheitelpunctes S_3 der hinteren Linsenfläche ist

$$\frac{f_3}{s_4} + \frac{\varphi_3}{s_5} = \frac{-112.6}{9\,s_4} + \frac{103.6}{9\,s_5} = 1.$$

Es ist nun $s_4 = S_3 h_2 = -5{,}4700$, woraus man findet $s_5 = S_3 H_\beta = -5{,}4276$.

Der Ort von H_β oder $S_1 H_\beta$ ist demnach gleich $S_1 S_3 - H_\beta S_3 = 8 - 5{,}4276 = 2{,}5724$ in Uebereinstimmung mit der früher gemachten Bestimmung.

Demnach ist die Reihenfolge der vier zwischen S_1 und S_2 liegenden Puncte $H_\alpha H_\beta h_2 h_1$ und die Oerter sind

$$S_1 H_\alpha = 2{,}1743^{mm}, \quad S_1 H_\beta = 2{,}5724^{mm},$$
$$S_1 h_2 = 2{,}6300^{mm}, \quad S_1 h_1 = 2{,}6640^{mm}.$$

Wir gehen zur Bestimmung der conjugirten Puncte der Knotenpuncte über.

d. *Der Punct* k_1. (Fig. 59.) Die Abscissengleichung conjugirter Puncte bezüglich S_1 ist dieselbe wie in a. Für K_α ist $s_0 = 7{,}2418$, woraus sich ergibt $s_1 = S_1 k_1 = 7{,}4193$ oder $S_2 k_1 = 3{,}4193$.

e. *Der Punct* k_2. Mit Rücksicht auf die Gleichung in b. ist $s_2 = S_2 k_1 = 3{,}4193$ und $s_3 = S_2 k_2 = 3{,}6102$ oder $S_3 k_2 = -0{,}3898$.

f. *Der Punct* K_β. Mit Rücksicht auf die Gleichung in c. ist $s_4 = S_3 k_2 = -0{,}3898$ und $s_5 = S_3 K_\beta = -0{,}3601$. Der Ort von K_β oder $S_1 K_\beta = S_1 S_3 - K_\beta S_3 = 8 - 0{,}3601 = 7{,}6399$ in Uebereinstimmung mit dem früher abgeleiteten Werthe.

Demnach liegen die vier Puncte K_α, k_1, k_2, K_β in der Krystalllinse und ihre Oerter sind:

$$S_1 K_\alpha = 7{,}2418^{mm}, \quad S_1 K_\beta = 7{,}6399^{mm},$$
$$S_1 k_1 = 7{,}4193^{mm}, \quad S_1 k_2 = 7{,}6102^{mm}.$$

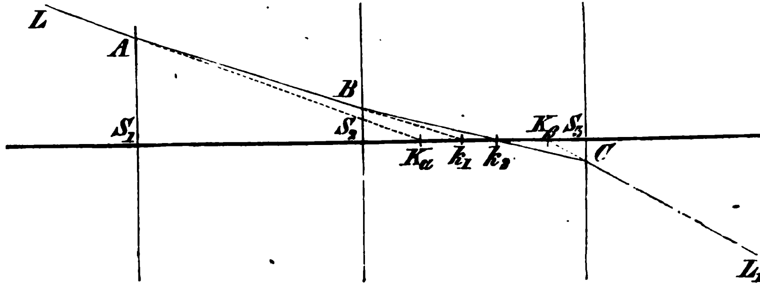


Fig. 59.

Fassen wir alles zusammen, so ist also erstlich h_1 derjenige reelle leuchtende Punct, dessen Bilder die beiden Hauptpuncte sind und k_2 derjenige Punct, dessen Bilder die beiden Knotenpuncte sind. Liegt K_β in S_3, so fällt k_2 damit zusammen; liegt K_β hinter S_3, so tritt auch k_2 in das folgende Medium über und wird virtuell. Einen reellen Lichtpunct gibt es alsdann nicht mehr, von dem die Knotenpuncte die beiden Bilder sind.

Für das angenommene Auge sind weiter die Entfernungen der Puncte k_1 und k_2 von dem Krümmungsmittelpuncte S_3 der Hornhaut

$$k_1 S_3 = 0{,}5807^{mm}, \quad k_2 S_3 = 0{,}3898^{mm}.$$

Helmholtz bezeichnet darnach (Physiol. Opt. § 10 S. 85) scheinbar k_1 als denjenigen Punct, dessen Bilder die beiden Knotenpuncte sind, wenn er $0{,}54^{mm}$ als die Grenze der Entfernung des Punctes vom Krümmungsmittelpuncte der Hornhaut angibt. Jedenfalls ist der erste Knotenpunct *nicht* sein durch die Hornhaut entworfenes Bild, sondern das Bild des Punctes k_2. Die an der bezeichneten Stelle vorgeschriebene Bestimmung des gesuchten Punctes ist irrthümlich. Es heisst dort (S. 85 dritter Absatz):

> „Derjenige Punct, dessen Bilder die beiden Knotenpuncte sind, liegt nach den in § 9 angegebenen Methoden zur Auffindung dieser Puncte zwischen dem Knotenpuncte der Hornhaut und dem ersten Hauptpuncte der Linse und seine Abstände von diesen beiden Puncten verhalten sich wie die kleinere Brennweite der Hornhaut zu der der Linse, also nahe wie 1 : 2."

Die correcte Fassung des Satzes würde lauten: Derjenige Punct, dessen Bilder die beiden Knotenpuncte sind, liegt zwischen dem Knotenpuncte der hinteren Linsenfläche und ihrem Krümmungsmittel-

puncte und dem zweiten Knotenpuncte des vor der Linsensubstanz gelegenen Systems und seine Abstände von diesen Puncten verhalten sich wie die kleinere Brennweite der hinteren Linsenfläche zu der des vorderen Systems, also nahezu wie 10 : 36. In Listings schematischem Auge beträgt der Abstand des vorderen Hauptpunctes der Linse vom Mittelpuncte der Hornhaut 1,6538 u. s. w.

Der von Helmholtz bezeichnete Punct ist identisch mit dem Puncte k_1, welcher aber die verlangte Eigenschaft nicht besitzt. Dagegen gilt es von k_2.

Um noch zu zeigen, wie man diesen Punct nach der zweiten in § 31 b. angegebenen Methode bestimmt, so gehen wir dabei aus von der Berechnung der Oerter des Knotenpunctes der Hinterfläche der Linse und des zweiten Knotenpunctes des vor der Linsensubstanz gelegenen Systems $S_1 S_3$.

Die Lage des Punctes k_2 ergibt sich dann mit Hülfe von Formel (102), nämlich

$$k' : k'' = f_1 : \varphi_2,$$

wo k' und k'' die Abstände des Punctes k_2 von den erwähnten Knotenpuncten, f_1 und φ_2 die erste Brennweite des vordern Systems und die zweite Brennweite der hinteren Linsenfläche bezeichnen. Es ist nun

$$f_1 = -19{,}076, \quad \varphi_1 = 27{,}746, \quad \varphi_2 = 68{,}6667.$$

Der Ort des Krümmungsmittelpunctes oder des Knotenpunctes der hinteren Linsenfläche ist $2{,}000^{mm}$. Den Ort des andern Knotenpunctes findet man aus den dioptrischen Elementen des vorderen Systems. Es ist nämlich

$$\alpha_{1,1} = -0{,}667, \quad \alpha_{2,1} = 3{,}502, \quad \varepsilon = -0{,}169.$$

Der Ort des zweiten Hauptpunctes ist also 0,498 und der Ort des zweiten Knotenpunctes $0{,}498 + f_1 + \varphi_1 = 9{,}168$. Die Summe der Abstände k' und k'' beträgt also $9{,}168 - 2{,}000 = 7{,}168$, woraus folgt $k' = -5{,}6102$ und $k'' = 1{,}5578$.

Demnach ist also der Ort des gesuchten Punctes 7,6102 in Uebereinstimmung mit dem oben gefundenen Werthe von $S_1 k_2$.

§ 50. **Ueber die Brechung der Lichtstrahlen in der Hornhaut.** Um den Durchgang des Lichtes durch die Hornhaut zu verfolgen, ist es nothwendig, genau die Krümmungen ihrer Flächen, ihre Dicke und ihr Brechungsvermögen zu kennen. Die genaue Bestimmung dieser optischen Elemente ist besonders deshalb von Wichtigkeit, weil das relative Brechungsvermögen der Hornhautsubstanz unter allen Augenmedien das grösste und die Hornhautkrümmung die einzig unveränderliche von denen der brechenden Flächen ist.

Die Krümmung der Vorderfläche ist von Helmholtz mittels des von ihm erfundenen Ophthalmometers gemessen worden. Aus

wiederholten Messungen von Helmholtz und Knapp*) geht hervor, dass sowol der horizontale als auch der verticale Meridian der vordern Hornhautfläche elliptische Curven sind und dass die Excentricitäten der beiden Curven von einander verschieden sind. Der mittlere Krümmungsradius beträgt im Scheitel ungefähr $8{,}0^{mm}$. Die Messungen der Krümmung der Hinterfläche sind bis jetzt nicht genug zuverlässig; man nimmt an, dass die beiden Flächen nahezu concentrisch sind, also der Krümmungsradius gleich $7{,}0^{mm}$ zu setzen sei, wenn man für die Dicke der Hornhaut im Scheitel 1^{mm} annimmt, was mit den Messungen derselben übereinstimmt. Der Brechungsindex der Hornhautsubstanz ist nach Messungen derselben von Prof. Aubert und mir mit Anwendung des Abbe'schen Refractometers gefunden $n = 1{,}3750$, also grösser wie ihn W. Krause angibt, welcher $n = 1{,}3507$ setzt.

Hiernach sind wir nun im Stande die Brennweite der Hornhaut, sowol in Luft, als auch mit Luft vor und Kammerwasser hinter derselben zu berechnen.

Im ersten Falle ist gemäss (120)

$$-f = \varphi = \frac{r_1 r_2 n_1}{(n_1 - 1)\,[n_1 (r_2 - r_1) + (n_1 - 1)\,d]}$$

und nach Einsetzung der Zahlenwerthe $r_1 = 8{,}0^{mm}$, $r_2 = 7{,}0^{mm}$, $n_1 = 1{,}3750$, finden wir die negative Brennweite

$$\varphi = -\ 205^{mm}.$$

Demnach wirkt die Hornhaut allein als schwache Zerstreuungslinse.

Im zweiten Falle denken wir uns hinter dieser Linse das Kammerwasser. Der Brechungsexponent desselben ist nach Listing, Fleischer und Hirschberg gleich 1,3376. Hieraus ergeben sich zunächst die relativen Indices der beiden Medien

$$n_1 = 1{,}3750 = \frac{11}{8}, \quad n_2 = \frac{1{,}3376}{1{,}3750} = \frac{103}{77} \cdot \frac{8}{11}.$$

Ferner ist

$$f_1 = -\ 21{,}333, \quad \varphi_1 = 29{,}333,$$
$$f_2 = +\ 257{,}78, \quad \varphi_2 = -\ 250{,}78.$$

Hieraus folgt für das Hornhautsystem die positive Brennweite

$$\varphi = 32{,}200^{mm}.$$

Zieht man nur eine Brechung der Lichtstrahlen an der vorderen Fläche der Hornhaut in Betracht, und setzt das Brechungsvermögen der Hornhaut gleich dem des Kammerwassers, so findet man $\varphi = 31{,}692^{mm}$. Für die Berechnung der Cardinalpuncte des Auges wird es daher genügen, das Hornhautsystem als ein einfaches zu betrachten, nämlich eine brechende Fläche, die vordere Hornhautfläche,

*) Die Krümmung der Hornhaut. Heidelberg 1860.

vor welcher sich Luft und hinter welcher sich wässerige Feuchtigkeit befindet.

§ 51. **Von dem dioptrischen Verhalten der geschichteten Krystalllinse.** Für den weiteren Durchgang der Lichtstrahlen durch die Linse kommt der Umstand in Betracht, dass die um den Mittelpunct derselben oder den *Kern* gelagerten Schichten der Linse eine Zunahme des Brechungsvermögens von der sie einhüllenden Haut oder der *Linsenkapsel* bis zum Kerne besitzen. Es ist von Senff, v. Zehender, Helmholtz und Andern theoretisch und experimentell nachgewiesen, dass die Brennweiten der Krystalllinse kleiner sind, als sie sein würden, wenn ihre ganze Masse das Brechungsvermögen ihrer am stärksten brechenden Substanz, das des Kernes, besässe. Mit andern Worten, der imaginäre Brechungsindex der Linse ist grösser als der des Kernes.

Um diese Thatsache zu erklären, können wir uns die Linse zusammengesetzt denken aus dem Kerne, einer fast kugeligen biconvexen Linse von positiver Brennweite und aus zwei Schalen, welche vor und hinter dem Kerne als concavconvexe Linsen an den Kern sich anschliessen. Da dies zwei Zerstreuungslinsen sind von geringerem Brechungsvermögen, so werden sie die Brennweiten des Kernes um so mehr vergrössern, je grösser ihr Brechungsvermögen ist. Das Maximum dieser Vergrösserung tritt offenbar dann ein, wenn die beiden Schalen von gleicher optischer Dichtigkeit mit der des Kernes werden. Daraus folgt mit Evidenz ohne die Nothwendigkeit eines streng mathematischen Beweises, dass die totale Brennweite der Krystalllinse in irgend einem dünneren Medium, z. B. im Glaskörper, grösser ist, als die des Kernes, kleiner aber als die einer homogenen Linse von gleichem Brechungsvermögen.

Wenn die Form der einzelnen Schichten, so wie das Gesetz der Zunahme der Brechungsindices genau bekannt wären, so würde man im Stande sein, die Cardinalpuncte der geschichteten Linse zu berechnen. Es ist bis jetzt aber weder das Gesetz der Zunahme der Brechungsindices von aussen nach innen, noch auch das der Wölbung der einzelnen Schalen genau bekannt. Deshalb ist es auch bis jetzt nicht möglich, den Gang der Lichtstrahlen durch dieses Medium einer genauen mathematischen Analysis zu unterwerfen. Wir müssen uns damit begnügen, das vorhandene Material zu verwerthen und das Fehlende theilweise willkürlich zu ergänzen, um die zur Berechnung erforderlichen Grundlagen zu gewinnen. Glücklicherweise sind wir im Stande experimentell die Wirkung der ganzen Krystalllinse zu bestimmen. Die Totalwirkung der geschichteten Krystalllinse ist denn auch mehrfach Gegenstand der Beobachtung und Messung gewesen, und so besitzen wir in diesen werthvollen Resultaten einen

Anhaltspunct für die Beurtheilung der Genauigkeit und Zuverlässigkeit der physikalischen und anatomischen Verhältnisse, welche der Berechnung der Cardinalpuncte der geschichteten Linse zur Grundlage dienen.

Zuerst (1846) hat Senff experimentell und arithmetisch nachgewiesen, dass die Krystalllinse durch ihre Schichtung mit einem von aussen nach innen wachsenden Brechungsindex stärker lichtbrechend sei, als wenn sie ganz aus Kernsubstanz bestände. Er untersuchte zu diesem Zwecke die Linse des Ochsenauges, für welches der totale Brechungsindex, welchen er das *totale Brechungsvermögen* nennt, grösser befunden wurde, als der des Kernes. Er bestimmte genau die Dimensionen, Krümmungen und Indices der einzelnen Schichten und entwickelte zur Berechnung der Cardinalpuncte der Ochsenlinse eine Formel, welche er auf eilf gemessene Schichten oder fünf Schalen und den Kern anwandte, wobei er eine genaue Uebereinstimmung der Berechnung mit der Beobachtung erzielte.

W. v. Zehender hat dann (1856) auch an zwei menschlichen Augen unter Zugrundelegung theils gegebener, theils willkürlich ergänzter Daten und bei Annahme von fünf Schichten oder zwei Schalen und einem Kerne die Rechnungen ausgeführt. In dem zweiten Beispiele (Anl. zum Stud. der Dioptrik des Auges. S. 184) wählt derselbe das Auge I nach Treviranus mit folgenden Daten:

$r_1 = 6{,}1^{mm}$	$d_1 = 0{,}67^{mm}$	$N_0 = 1{,}3366$
$r_2 = 5{,}4$	$d_2 = 0{,}45$	$N_1 = 1{,}3767$
$r_3 = 5{,}0$	$d_3 = 1{,}80$	$N_2 = 1{,}3786$
$r_4 = -2{,}9$	$d_4 = 0{,}45$	$N_3 = 1{,}3990$
$r_5 = -3{,}3$	$d_5 = 1{,}57$	$N_4 = 1{,}3786$
$r_6 = -5{,}0$	$D = 4{,}94$	$N_5 = 1{,}3394$

Hieraus berechnet v. Zehender

f	φ	α_1	α_2	ε
$-52{,}0$	$+52{,}1$	$-2{,}47$	$+2{,}43$	$+0{,}04$

Eine homogene Linse vom Brechungsvermögen des Kernes würde dagegen folgende dioptrische Constanten ergeben:

f	φ	α_1	α_2	ε
$-61{,}0$	$+61{,}1$	$-2{,}61$	$+2{,}22$	$+0{,}11$

Setzt man dagegen das totale Brechungsvermögen der Linse, welches v. Zehender den *imaginären Brechungsindex* nennt, nämlich $n = 1{,}4098$, so erhält man die Brennweite der geschichteten Linse.

Helmholtz hat das in Rede stehende Theorem später durch Messungen der Cardinalpuncte an zwei todten Linsen bestätigt und gefunden, dass das totale Brechungsvermögen gleich 1,4414 bis

1,4519 zu setzen sei. Andere Angaben über den Totalindex der ganzen Linse sind gemacht von

Listing . .	$n = 1{,}4545$
Th. Young	$n = 1{,}4385$
v. Zehender	$n = 1{,}4393$
Woinow .	$n = 1{,}4387$.

Wir können darnach wol den Werth 1,4450 als den wahrscheinlichsten gelten lassen.

Da die von v. Zehender berechnete Linse von etwas abweichender Form und die zu Grunde gelegten Brechungsindices von Brewster jedenfalls zu klein sind, so wollen wir die Rechnungen noch in anderer Weise wiederholen und zwar für die Linse sowol im accommodationslosen als im accommodirten Zustande. Zu diesem Zwecke bedarf es zunächst der Feststellung der Dimensionen und der Brechungsindices der aufeinanderfolgenden Schichten nach den zuverlässigsten Angaben der Messungen.

§ 52. **Die Brechungsindices der Augenmedien und der geschichteten Krystalllinse.** Ueber die Brechungsindices der Hornhaut, des Kammerwassers, der Linsenkapsel, der äusseren Schicht und der mittleren Schicht der Linsensubstanz, des Kernes und des Glaskörpers besitzen wir werthvolle Messungen von Th. Young (1801), Chossat (1818), Brewster (1819), W. Krause (1855), Helmholtz, Fleischer (1872), Hirschberg (1874), Woinow (1874) und von Prof. Aubert (1875). Die Messungen der Letzteren sind mittels des Abbe'schen Refractometers ausgeführt worden und zwar von Fleischer und Hirschberg an den beiden flüssigen Augenmedien, von Herrn Prof. Aubert und mir gemeinschaftlich auch an den Häuten und den Linsenschichten. Alle diese Messungen weichen freilich zum Theil ziemlich von einander ab. Um so mehr aber wiederholte Messungen mit den früheren übereinstimmen, desto mehr gewinnen sie an Zuverlässigkeit. Die Methode des Refractometers ist von allen bisher angewandten Methoden unstreitig die vorzüglichste, da die geringsten Mengen zu einer Messung verwendet werden können. Eine kurze Beschreibung dieses wichtigen Instruments so wie eine kurze Darlegung des Princips, worauf seine Einrichtung beruht, wird weiter unten in § 57 gegeben werden. Zum Vergleiche stellen wir die Angaben der genannten Physiker hier tabellarisch zusammen.

	Fraunh. Linie.	Horn-haut.	Kam-mer-wasser.	Linsen-kapsel.	Aeuss. Schicht.	Mittl. Schicht.	Kern.	Glas-körper.
Young . . .	*E*	—	—	—	—	—	1,4026	—
Chossat . . .	—	1,33	1,338	—	1,338	1,395	1,420	1,339
Brewster . .	*E*	—	1,3366	—	1,3767	1,3786	1,3990	1,3394
W. Krause . .	*D—E*	1,3525	1,3435	—	1,4071	1,4319	1,4564	1,3506
Helmholtz . .	*E*	—	1,3365	—	1,4189	—	—	1,3382
Fleischer . .	*D—E*	—	1,3373	—	—	—	—	1,3364
Hirschberg . .	*D—E*	—	1,3375	—	—	—	—	1,3366
Woinow . . .	*E*	—	—	—	1,3968	1,4215	1,4351	—
Aubert / L. Matthiessen	*D*	1,3750	1,3347	1,3800	1,3903	1,4077	1,4207	1,3344

Hiernach dürfen wir wol die Brechungsindices des Kammerwassers und des Glaskörpers als ziemlich einander gleich annehmen und zwar $n = 1,3365$. Misslicher steht es mit den übrigen Indices. Obgleich die Indices von Chossat nur auf drei Decimalen angegeben sind, so nehme ich dennoch nicht Anstand, denselben einen grösseren Grad von Zuverlässigkeit zuzuschreiben, als den beiden darauf folgenden Reihen.

Für die Berechnung der dioptrischen Constanten der geschichteten Linse bleibt demnach nichts weiter übrig, als uns auf die eigenen Messungen und die von Chossat zu beschränken und folglich anzunehmen, dass der Index des Kernes den Werth 1,4200 nicht weit mehr übersteige. Diese Annahme gewinnt ausserdem noch einen Stützpunct in der Angabe Young's, dass die Kernsubstanz der todten Linse den Index 1,4026, im Leben aber muthmasslich den Index 1,4144 besitze.

Brewster hat ausser den in der tabellarischen Uebersicht aufgeführten Indices noch den „mittleren" Index der Linse oder den Index der gemischten Linsensubstanz gemessen. Er fand $n = 1,3839$. Wie man denselben Werth durch Rechnung finden kann, wenn die Brechungsindices der einzelnen Schichten bekannt sind, und wie man durch Vergleichung dieser beiden Werthe, des berechneten mit dem beobachteten, die Zuverlässigkeit der specifischen Indices zu beurtheilen im Stande ist, wird weiter unten gezeigt werden.

Die Brechungsindices der Linsenschichten, welche von meinem Collegen, Herrn Professor Aubert*) und mir mittels Anwendung eines vom Mechaniker Zeiss in Jena angefertigten grossen Abbe'schen Refractometers gemessen sind, beziehen sich auf die Fraunhofer'sche Linie D, wobei die Theilung des Instrumentes für destillirtes Wasser bei 12,5° C. den Werth 1,3326 anzeigt. Nach van der Willigen

*) Vergl. Handbuch der gesammten Augenheilkunde, herausgegeben von A. Gräfe und Th. Sämisch. II. Cap. IX. S. 409. Leipzig, 1876.

beträgt derselbe als Mittel von zehn Beobachtungsreihen bei 21,4° C. 1,33289. Die Messungen wurden an zwei Paaren menschlicher Augen ausgeführt und folgende Zahlenwerthe für die nicht ganz frischen Augen eines funfzigjährigen Mannes und eines zweitägigen Kindes erhalten:

Substanz:	Mann:		Kind:	
	Auge I.	Auge II.	Auge I.	Auge II.
Hornhaut	—	1,3770	1,3721	—
Kammerwasser	—	—	1,3338	—
Vordere Linsenkapsel	—	—	1,3821	1,3780
Aeusserste Linsenschicht . . .	1,3953	1,3853	1,3967 (für alle drei Schichten)	—
Mittlere Linsenschicht	1,4087	1,4067		—
Kernsubstanz	1,4121	1,4293		—
Hintere Linsenkapsel	1,3455	1,3658	1,3503	1,3572
Glaskörper	—	1,3348	1,3340	—
Destill. Wasser	1,3326	—	—	—
„Mittlerer“ Index der Linse ber.	(1,3934)	—	1,3967	—

Die zu prüfenden Partikeln der Linsensubstanz wurden in folgender Weise aus der Linse entnommen. Es wurde ein Axenschnitt gemacht und eine der Linsenhälften in eine passende Vertiefung gelegt, so dass der Schnitt horizontal frei lag. Der Durchmesser wurde möglichst genau in fünf gleiche Theile zerlegt und aus diesen fünf Intervallen, also etwa von 2 zu 2^{mm}, die Probe in der Grösse eines guten Stecknadelknopfes entnommen. Die Häute wurden möglichst von der angrenzenden Flüssigkeitsschicht befreit, weil man sonst leicht den Index der Flüssigkeitsschicht erhält, wie man daran erkennen kann, dass statt *einer* Auslöschungsgrenze mehrere auftreten. Dasselbe zeigt sich, wenn man zu viel Substanz nimmt, und also Proben aus mehreren Schichten von verschiedener Brechbarkeit des Lichts erhält. Erst nach gehöriger Mischung erhält man einen einfachen Brechungsindex, der sich aus denen der Bestandtheile nach der Formel von Landolt ergibt, welche lautet

$$\frac{(n-1)\,p}{d} = \frac{(n_1-1)\,p_1}{d_1} + \frac{(n_2-1)\,p_2}{d_2} + \dots$$

Es geht nun aus den Messungen von Treviranus hervor, dass die Axen des Kernes bei einer Dicke von 2^{mm} sich genau zu einander verhalten, wie die der ganzen Linse. Daraus wird man zu schliessen berechtigt sein, dass alle Schichten etwa mit Ausnahme des innersten Kernes einander ähnlich sind. Wenn man ferner voraussetzt, dass jede Schicht in ihrer ganzen Ausdehnung dasselbe

Brechungsvermögen besitzt, so wird die Zunahme des Brechungsindex in der Richtung der Axe dasselbe Gesetz befolgen, wie in der Richtung des verticalen oder transversalen Durchmessers der Linse.

Stellen wir hiernach die Daten zusammen, und bezeichnen die Indices mit n_A, n_B, $\cdots$ und die Abstände MA, MB, $\cdots$ (Fig. 60) der Schichten vom Centrum der Linse mit y, so würde sich aus der obigen Tabelle ergeben

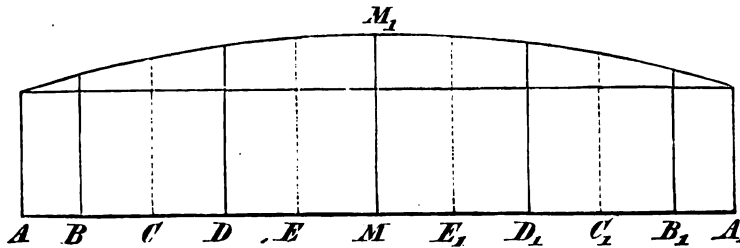


Fig. 60.

	Δn	y
$(n_A = 1{,}3750)$		$2{,}0^{mm}$
	(0,0150)	
$n_B = 1{,}3900$		1,6
	0,0175	
$n_D = 1{,}4075$		0,8
	0,0075	
$n_M = 1{,}4150$		0,0

Eine oberflächliche Betrachtung dieser Zahlenreihen lehrt, dass von der äussersten Schicht, der Linsenkapsel aus die Zunahme des Index zuerst rasch, in der Nähe des Kernes aber langsamer erfolgt. Dieser Umstand ist für die dioptrische Wirkung der Linse, wie wir sehen werden, von der allergrössten Bedeutung, denn einmal bewirkt derselbe die grösstmöglichste Steigerung des totalen Brechungsvermögens, andererseits, dass mit dieser Steigerung die sphärische Längenabweichung der Strahlen, welche am Rande der Pupille in die Linse eintreten, gleichen Schritt hält, so dass sich beide in vortheilhaftester Weise unterstützen und durch eine eigenthümliche Art von Aplanatismus die Undeutlichkeit der Bilder äusserer Objecte vermieden wird.

Die Curve der Brechungsindices ist eine Function der Curve der Krümmungen der Schichten. Für ein in dieser Hinsicht vollkommenes Auge müsste sich aus der ersteren die zweite berechnen lassen und umgekehrt.

Es käme nun zunächst darauf an, die Curve der Indices zu bestimmen. Dieselbe ist nach oben convex und deshalb wird es vorläufig genügen, eine parabolische Krümmung anzunehmen. Diese Hypothese gewinnt eine Stütze in den Messungen von Chossat an einer Elephantenlinse. Chossat hat bei verschiedenen Thieren eine grössere Anzahl Linsenschichten gemessen, welche die allmälige Zunahme des Brechungsindex gegen die Mitte der Linse deutlich zeigen.

An einer Elephantenlinse hat er neun Schichten messen können. Er fand

n	$\varDelta n$	$\frac{y}{b}$
1,369	0,018	$^{16}/_{17}$
1,387	0,018	$^{14}/_{17}$
1,405	0,010	$^{12}/_{17}$
1,415	0,009	$^{10}/_{17}$
1,424	0,006	$^{8}/_{17}$
1,430	0,002	$^{6}/_{17}$
1,432	0,004	$^{4}/_{17}$
1,436	0,014	$^{2}/_{17}$
1,450		0

In dieser Tabelle bezeichnet y den Abstand des gemessenen Punctes vom Centrum, b den halben Durchmesser der Linse.

Chossat hat sich viele Mühe gegeben, auf Grund dieser Messungen irgend ein Gesetz ausfindig zu machen. Doch glaubt er den Mangel an Erfolg der unvollkommenen Messungsmethode zurechnen zu müssen. Wenn die dritte Decimale noch genau wäre, so müsste die Curve nahe vor dem Kerne einen Inflexionspunct besitzen und vom dritten Grade sein. Es ist dieses indess sehr unwahrscheinlich, weil dadurch die Centralstrahlen von den Randstrahlen der Linse zu sehr abweichen würden. Wir dürfen wol annehmen, dass die Werthe der Indices der Kernschichten noch zu ungenau sind.

Setzen wir für die Curve der Indices eine Parabel voraus, so werden die Zahlenwerthe ziemlich gut wiedergegeben durch die Gleichung

$$n = 1{,}440 - 0{,}079 \left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

$\frac{y}{b}$	n ber.	n beob.	$\varDelta$
$^{16}/_{17}$	1,370	1,369	+ 0,001
$^{14}/_{17}$	1,387	1,387	0,000
$^{12}/_{17}$	1,401	1,405	− 0,004
$^{10}/_{17}$	1,413	1,415	− 0,002
$^{8}/_{17}$	1,423	1,424	− 0,001
$^{6}/_{17}$	1,430	1,430	0,000
$^{4}/_{17}$	1,436	1,432	+ 0,004
$^{2}/_{17}$	1,439	1,436	+ 0,003
0	1,440	1,450	− 0,010

Es ist bereits oben bemerkt worden, dass Senff die dioptrische

Wirkung der geschichteten Linse an einem Ochsenauge untersucht hat. Er selbst hat nichts darüber veröffentlicht, aber Volkmann*) theilt uns Folgendes mit: „Bei einer Ochsenlinse wurde der Brechungsexponent 1,539 befunden, während der Brechungscoefficient der äusseren Schicht nur 1,374 und der des Kernes 1,453 war. An demselben Auge waren alle Dimensionen, Abstände und Krümmungshalbmesser sowie die Brechungsexponenten der durchsichtigen Medien genau bestimmt worden und als nun mit Zugrundelegung jener brechenden Kraft der Linse (1,539) die Berechnung des Ganges der Lichtstrahlen ausgeführt wurde, so wich der Vereinigungspunct derselben nur um 0,1‴ von der Netzhaut ab, eine Grösse, welche unter den Beobachtungsfehlern liegt. Senff war im Stande, diese ausserordentliche Sammelkraft der Linse auch theoretisch zu erklären. Er entwickelte eine Formel, welche er auf sechs in Bezug auf ihr Brechungsvermögen untersuchte Schichten der Linse anwendete und die Rechnung ergab eine Kraft von 1,541, was mit der empirisch gefundenen von 1,539 in überraschender Weise zusammenstimmt.“

So weit Volkmann. Specielle Brechungsindices der einzelnen Schichten oder das Gesetz der Zunahme von aussen nach innen sind nicht weiter veröffentlicht. Wir sind deshalb auch nicht im Stande, uns ein Urtheil über die Genauigkeit der Messungen von Senff zu bilden. Der Index der äussersten Schicht stimmt in auffallender Weise mit dem des menschlichen Auges und dem des Elephantenauges nahezu überein. Der des Kernes ist jedoch bei Linsen ausgewachsener Thiere noch zu klein gefunden.

Indem es mir von grossem Interesse zu sein schien, die in allen Linsenaugen constanten Brechungsverhältnisse einerseits, und das Gesetz der Zunahme des Brechungsvermögens von aussen nach innen an der geschichteten Linse andrerseits aufzufinden, habe ich mit möglichster Sorgfalt mittels des Refractometers an mehreren Ochsenaugen sowol die Brechungsindices der Flüssigkeiten, als die der Linsenschichten und besonders auch der Häute zu messen gesucht. Die Indices wurden längs dem Durchmesser der Linse gemessen in sieben gleichen Abschnitten. Die eingeklammerten Zahlen bezeichnen die Anzahl der Messungen.

*) Volkmann, Art. Sehen, Handwörterb. der Physiol. III. 1 S. 290. Aubert, Grundzüge der physiol. Optik S. 410.

Optische Constanten des Ochsenauges, gemessen mit dem grossen Abbe'schen Refractometer.

Gemessene Objecte.	
I. Brechungsindices:	
Brechungsindex des destillirten Wassers 12,5° C.	1,3326
- der Hornhaut (18)	1,3785
- - äusseren Basalmembran (1)	1,3737
- - inneren Membran (1)	1,3722
- des Kammerwassers (5)	1,3351
- der Glaskörperflüssigkeit (6)	1,3348
- - vorderen dicken Linsenkapsel (12)	1,3784
- - äussersten Corticalsubstanz vorne (2)	1,3832
- - gallertartigen Corticalschicht 2,5^{mm} (10)	1,3970
- - äusseren Kernschicht 2,5^{mm} (12)	1,4418
- - mittleren - 2,5 (10)	1,4629
- des innersten festen Kernes (Durchmesser 4½^{mm}, Axe 3^{mm}) 2,5^{mm} (7)	1,4714
- der äussersten Corticalsubstanz hinten (1)	1,3850
- - hinteren dünnen Linsenkapsel (4)	1,3816
- - gemischten Linsensubstanz (5)	1,4139
II. Dimensionen:	
Krümmungsradius der vorderen Hornhautfläche (1)	18,0^{mm}
- - - Linsenfläche (1)	13,75
- - hinteren - (1)	10,25
Dicke der Hornhaut (1)	1,25
Tiefe der vorderen Augenkammer (1)	3,75
Höhe der Hornhaut (1)	5,0
Ort der hinteren Linsenfläche (1)	17,0
Innere Augenaxe vom Scheitel der Hornhaut an (3)	34,0
Innerer verticaler Durchmesser (3)	38,0
Durchmesser der Krystalllinse (3)	17,75
Axe - - (5)	12,00
Vordere Axenhälfte bis zum Durchmesser (4)	5,0
Hintere - - - - (4)	7,0
Festerer Linsenkörper, Durchmesser (3)	13,75
- - Axe (2)	8,5
Linsenkern, Durchmesser	9,0
- Axe	6,0

Die in der vorstehenden Tabelle aufgeführten Zahlenwerthe sind die Mittelwerthe aus ungefähr 500 Einzelmessungen, von denen je

vier an einem Einzelobject ausgeführt wurden. Diese Zahlenwerthe sind in mannigfacher Hinsicht überaus belehrend in Betreff der physikalischen Verhältnisse im menschlichen Auge. Aus einem Vergleiche der vorstehenden Messungen untereinander und mit denen am menschlichen Auge geht zunächst hervor, dass die durchsichtigen Häute des Auges einen gemeinschaftlichen Brechungsindex besitzen und zwar nahezu 1,3784. Ferner haben die beiden Augenflüssigkeiten einen constanten nahezu gleichen Index, nämlich $n_D = 1,3350$. Als ein dritter constanter Werth ist der des Brechungsindex der äussersten unter der Kapsel liegenden Corticalsubstanz anzusehen. Chossat fand am Elephantenauge 1,369, Senff am Ochsenauge 1,374, ich 1,384. Dieser Index schliesst sich also an den der Linsenkapsel unmittelbar an. Im Anfange nimmt der Brechungsindex mit der Tiefe der Schichten rasch zu. Unmittelbar unter der Kapsel ist der Differenzialquotient des Brechungsvermögens ein Maximum und scheint bei allen Augen denselben Werth zu besitzen. Eine $2\frac{1}{2}^{mm}$ dicke Schicht der Corticalsubstanz an der menschlichen Linse ergab Professor Aubert und mir in einem Falle den Werth 1,3953. Ich erhielt aus zehn Messungen an Ochsenlinsen 1,3970. Dagegen ist der Index des innersten Kernes bei den Augen sehr verschieden und nimmt mit der Grösse der Linse zu. Senff fand bei der Ochsenlinse den Maximalwerth gleich 1,453, welcher im Durchschnitt zu niedrig ist. Jedoch fand ich bei einem Auge 1,4544. Derselbe lässt sich mit dem Refractometer sehr gut bestimmen, da um das Centrum herum die optische Dichtigkeit am gleichmässigsten ist und in dem Instrumente eine ausserordentlich scharfe Auslöchungsgrenze des Lichtes zeigt, wie bei keiner der übrigen Schichten. Im Centrum des Kernes ist der Differenzialquotient des Brechungsvermögens gleich Null und die Curve, welche dasselbe als eine Function des Abstandes der brechenden Schichten vom Centrum darstellt, nach oben convex (Fig. 60).

Meine Messungen der Brechungsindices der geschichteten Linse geben nun nicht genau die Werthe derselben in den Puncten B, D und M (Fig. 60) an, sondern nur den Mittelwerth der Schichten AC, CE, EE_1. Um sie für beliebige Abstände vom Centrum angeben zu können, ist es nöthig, für n einen allgemeinen Ausdruck zu gewinnen. Es ergaben sich für die Ochsenlinse folgende Mittelwerthe:

Gemessene Objecte.	n	Δn	Abstände.
Linsenkapsel . . .	1,3784		$8,75^{mm}$
		0,0186	
Corticalschicht . . .	1,3970		7,5
		0,0448	
Aeussere Kernschicht	1,4418		5,0
		0,0211	
Mittlere -	1,4629		2,5
		0,0085	
Kernsubstanz . . .	1,4714		0,0

Die Indices befolgen nahezu die parabolische Gleichung

$$n = 1{,}4720 - 0{,}0936\left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

wo b den halben Durchmesser bezeichnet, also gleich 8,75^{mm} zu setzen ist. Vergleichen wir die Beobachtung mit der Berechnung, so ergeben sich folgende Zahlen:

Gemessene Objecte.	n beob.	n ber.	S	y
Linsenkapsel . . .	1,3784	1,3784	1,3784	8,75^{mm}
Corticalschicht . . .	1,3970	1,4032	1,4026	7,5
—	—	1,4243	—	6,25
Aeussere Kernschicht	1,4418	1,4414	1,4408	5,0
—	—	1,4548	—	3,75
Mittlere Kernschicht	1,4629	1,4644	1,4637	2,5
—	—	1,4701	—	1,25
Kernsubstanz . . .	1,4714	1,4720	1,4714	0,0

Die Gleichung ergibt in Bezug auf y den Differenzialquotienten

$$\frac{\partial n}{\partial y} = -0{,}1872\,\frac{y}{b^2}\,.$$

Die in der Columne S aufgeführten Werthe sind die Mittelwerthe der Schichten, welche sich aus den in der zweiten Columne angegebenen berechneten Werthen einzelner Puncte ergeben würden. Man erhält sie mittels Anwendung der ersten Cotesischen Formel für drei aufeinander folgende Ordinaten. Sie lautet:

$$n = \frac{\int_{y_0}^{y_2} n\,\partial y}{y_2 - y_0} = \frac{1}{6}\,(n_0 + 4n_1 + n_2).$$

Zu den optischen Constanten des Ochsenauges habe ich auch noch den beobachteten Index der gemischten Linsensubstanz hinzugefügt. Wir können denselben für unsere systematische Linse berechnen mittels Anwendung der Formel von Landolt:

$$\frac{n-1}{d}\,p = \frac{n_1 - 1}{d_1}\,p_1 + \frac{n_2 - 1}{d_2}\,p_2 + \cdots$$

Da nicht anzunehmen ist, dass bei der Mischung der Linsensubstanz diese ihr Volumen ändert, so kann man $p : d = v$ (Volumen) setzen. Man erhält alsdann

$$n = \frac{n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 + \cdots}{v_1 + v_2 + v_3 + \cdots} = \frac{\Sigma\,(nv)}{\Sigma\,(v)},$$

wo $v_1, v_2, \cdots$ die Volumina, $n_1, n_2 \cdots$ die specifischen Brechungsindices der einzelnen Bestandtheile der Mischung bezeichnen.

An dem Gefüge der geschichteten Linse liess sich nun deutlich erkennen und durch Messung bestätigen, dass alle Schichten fast genau einander ähnlich sind. Nehmen wir an, dass jede der Elementarschichten in ihrer ganzen Ausdehnung ein gleiches Brechungsvermögen besitze, so würde der Ausdruck für den „mittleren" Index sein

$$n = n_0 + \frac{\int_0^b v \partial n}{\int_0^b \partial v}, \qquad (138)$$

wo n_0 den Index der Linsenkapsel bedeutet und für dn der positive Werth einzusetzen ist. Nun ist

$$v = \left(\frac{y}{b}\right)^3 \int_0^b \partial v,$$

folglich

$$n = n_0 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}1872 = 1{,}4158.$$

Die Messungen ergaben im Durchschnitt den Werth 1,4139.

Allgemein ist das Brechungsvermögen der gemischten Linse gleich demjenigen von der Schicht, für welche

$$\frac{y}{b} = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}77.$$

Diese directe Bestimmung des „mittleren" Index kann also zur Controle der Messungen der einzelnen Schichten mit Vortheil verwendet werden. Man muss aber dafür Sorge tragen, dass die Linsensubstanz, nachdem die Kapsel abgelöst ist, durch längeres Reiben in einem kleinen Mörser möglichst homogen gemacht wird. Dieser Zustand ist leicht erkennbar, wenn das Refractometer eine scharfe Auslöschungsgrenze zeigt.

Die Messungen an der geschichteten Linse des menschlichen Auges sind zwar noch ziemlich wenig zuverlässig. Dennoch wollen wir dieselben schon jetzt einer ähnlichen mathematischen Betrachtung unterziehen. Die Messungen an Thieraugen von grösserem Volumen geben theilweise eine gute Grundlage dafür ab, insbesondere die constanten Werthe der Brechungsindices der Häute, der äussersten Corticalsubstanz und das Gesetz des Wachsthums der Indices von aussen nach innen. Für die menschliche Augenlinse statuiren wir folgende parabolische Gleichung der Indices

$$n = 1{,}4150 - 0{,}0400 \left(\frac{y}{b}\right)^2, \qquad (139)$$

wo b wiederum den halben Durchmesser, also $4{,}5^{mm}$ bezeichnet.

Wahrscheinlich ist die erste Constante etwas grösser, die zweite aber ist wol wenig von der Wirklichkeit abweichend und für die

Berechnung die wichtigste. Vergleichen wir die Beobachtung mit der Berechnung, so ergeben sich folgende Zahlenwerthe:

Gemessene Objecte.	n ber.	n beob.	Abstand y:
Linsenkapsel . . .	1,3750	1,3800	4,5mm
Aeussere Schicht . .	1,3894	1,3900	3,6
Mittlere - . .	1,4086	1,4077	1,8
Kernsubstanz . . .	1,4150	1,4200	0,0

Der „mittlere" Index berechnet sich auf 1,3910 und ist gleich dem Index derjenigen Schicht, deren Abstand vom Centrum auf dem Durchmesser $0,77 \times 4,5 = 3,46^{mm}$ beträgt.

Den Differenzialquotienten des allgemeinen Index n finden wir gleich

$$\frac{\partial n}{\partial y} = -0,0800 \frac{y}{b^2}.$$

Vergleichen wir den Zuwachs in gleicher Tiefe bei der menschlichen und der Ochsen-Linse, so haben wir für die äusserste Corticalsubstanz $y = b$ zu setzen und zwar dort $b = 4,5$, hier $8,75^{mm}$. Man erhält

$$\frac{\partial n}{\partial n_1} = \frac{0,0800}{0,1872} \cdot \frac{8,75}{4,5} = 0,83,$$

also den Zuwachs in gleicher Tiefe der Corticalschicht nahezu gleich.

Wir werden später die Berechnung der Cardinalpuncte der systematischen geschichteten Linse so ausführen, dass wir uns die Axe in sieben gleiche Theile getheilt denken. Wir stellen zu diesem Zwecke die Werthe von n tabellarisch zusammen nach Abständen von $^1/_{14}$ zu $^1/_{14}$ Durchmesser nebst den nach der ersten Cotesischen Formel abgeleiteten Mittelwerthen der Indices der Schalen der Linse.

$y : b$.	n nach Abscissen.	n nach Schichten.
0	1,4150	1,4147
$^1/_7$	1,4142	—
$^2/_7$	1,4117	1,4115
$^3/_7$	1,4077	—
$^4/_7$	1,4020	1,4017
$^5/_7$	1,3946	—
$^6/_7$	1,3857	1,3854
$^7/_7$	1,3750	—

Nehmen wir an, dass die systematische Linse im Glaskörper ($n = 1,3365$) liege, so erhalten wir für die hintereinander liegenden

Schichten folgende relative Brechungsindices bezüglich des Glaskörpers:

$$n_1 = 1 : n_7 = 1{,}0366,\ n_2 = 1 : n_6 = 1{,}0118;\ n_3 = 1 : n_5 = 1{,}0070,$$

$$n_4 = 1{,}0023;\ n_4' = \frac{1{,}4150}{1{,}3365} = 1{,}0585.$$

Für den Brechungsindex n_4' der Kernsubstanz bezüglich des Glaskörpers statuirte Th. Young den Werth 1,0589.

Von der geometrischen Figur der systematischen Linse und ihrer Schalen. Wir haben jetzt die Form der Linse und ihrer Schalen festzustellen und zwar erstlich im accommodationslosen, zweitens im accommodirten Zustande. Mit Rücksicht auf die Daten der beiden systematischen Augen von Helmholtz nehmen wir an § 53.

a. für das *fernsehende* normale Auge
die Axe der Linse gleich $3{,}6^{mm}$
den Durchmesser - $9{,}0^{mm}$;

b. für das *nahesehende* normale Auge
die Axe der Linse gleich $4{,}0^{mm}$
den Durchmesser - $8{,}6^{mm}$.

Da die Linse bei der Accommodation etwas an Dicke zunimmt, muss der Durchmesser etwas kleiner werden. Es wird dabei nahezu die Gleichung

$$a_0 b_0^2 = a_1 b_1^2$$

bestehen müssen und hieraus ist der Werth 8,6 berechnet. Nach den Messungen von Treviranus und Tiedemann liegt im todten (accommodationslosen) Auge der Kern näher an der Vorderfläche und zwar verhalten sich die vordere und hintere Axenhälfte zu einander wie 1,8 : 2,5 oder nahezu wie 1,6 : 2,0. In dem fernsehenden normalen Auge können wir also die vordere Axenhälfte gleich $1{,}6^{mm}$, die hintere gleich $2{,}0^{mm}$ setzen.

Zerlegen wir die Linse durch einen Aequatorialschnitt und betrachten die beiden Hälften als zwei Rotationskörper von der Form

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2,$$

so lassen sich die Constanten mit Hülfe der bekannten Krümmungsradien der Scheitel dieser Flächen bestimmen. Nach Listing ist nun

1) der Radius der vorderen Krümmung gleich 10^{mm},
2) der Radius der hinteren Krümmung gleich 6^{mm}.

Für das Ellipsoid ist weiter

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p,$$

also $$\varrho_1 = b_1^2 : a = 10,\quad \varrho_2 = b_2^2 : a_2 = 6.$$

Setzen wir für die Vorderfläche den Werth von ϱ_1 ein, so wird

$$y^2 = 20x - \frac{10}{a}x^2.$$

Im Centrum der Linse ist $y = 4{,}5$, $x = 1{,}6$, woraus sich ergibt

$$a = 2{,}2^{mm}, \quad b = 4{,}7^{mm}.$$

C. Krause erhielt von neun Augen die Mittelwerthe

$$a = 2{,}4, \quad b = 4{,}6.$$

Die Vorderfläche der Linse ist demnach ein Rotationsellipsoid und die Gleichung eines Meridians

$$y^2 = 20x - 4{,}5x^2.$$

Setzen wir für die Hinterfläche den Werth von ϱ_2 ein, so wird

$$y^2 = 12x - \frac{6}{a}x^2.$$

Im Centrum ist $y = 4{,}5$ und $x = 2{,}0$, woraus sich ergibt

$$a = 6{,}4, \quad b = 6{,}2.$$

Die hintere Fläche ist demnach nahezu eine Kugelfläche und die Gleichung eines Meridians

$$y^2 = 12x - 0{,}94x^2.$$

C. Krause sieht degegen die Hinterfläche als ein Rotationsparaboloid an vom Parameter $2p = 10{,}1^{mm}$. Bei den Ochsenaugen fand ich den Meridian der Hinterfläche genau kreisförmig.

Bei der für die *Nähe* accommodirten Linse nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass das Gefüge derselben durchaus symmetrisch sei. Hiermit stimmen auch die Beobachtungen überein. Die zu Grunde zu legenden Daten sind folgende:

die Axe der Linse ist gleich . . .	$4{,}0^{mm}$,
der Durchmesser - - . . .	8,6 „
die Axe des Kernes - - . . .	2,0 „
der Durchmesser des Kernes ist gleich	4,3 „
der Krümmungshalbmesser der Vorderfläche	5,6,
- - - Hinterfläche	5,6.

Wir bestimmen wiederum die Gleichung eines Meridians, indem im Centrum $y = 4{,}3$ und $x = 2{,}0$ gesetzt wird. Wir finden dann

$$a = 5{,}6, \quad b = 5{,}6.$$

Die Krümmung ist demnach beiderseits sphärisch und der von einer beliebigen innern Schale umschlossene Körper eine gleichseitige biconvexe Linse. Die Gleichung eines Meridians- oder Axenschnittes ist in diesem Falle

$$y^2 = 11{,}2x - x^2.$$

Da aus dem oben angeführten Messungen an dem Kerne der Ochsenlinse hervorgeht, dass alle Schalen einander ähnlich sind und dieses Verhalten auch an der menschlichen Linse durch Treviranus gefunden ist, so wollen wir der Einfachheit wegen annehmen, dass bei der zweiten (accommodirten) systematischen Linse der Krümmungsradius der Flächen dem Abstande derselben vom Centrum proportional sei. Dann ist bei sieben gleich dicken Schichten

$$r_1 = 5{,}6, \quad r_2 = \tfrac{5}{7} \cdot r_1 = 4{,}0, \quad r_3 = \tfrac{3}{7} r_1 = 2{,}4, \quad r_4 = \tfrac{1}{7} r_1 = 0{,}8.$$

Die Gleichungen der Meridiane der zugehörigen Flächen sind alsdann

$$\begin{aligned} y_1^2 &= 11{,}2\, x_1 - x_1^2, \\ y_2^2 &= 8{,}0\, x_2 - x_2^2, \\ y_3^2 &= 4{,}8\, x_3 - x_3^2, \\ y_4^2 &= 1{,}6\, x_4 - x_4^2. \end{aligned}$$

Wir wollen nun weiter versuchen, die Cardinalpuncte der geschichteten Linse zu bestimmen.

Berechnung der Cardinalpuncte und des totalen Brechungsvermögens der accommodirten geschichteten Linse des menschlichen Auges. Die Cardinalpuncte der geschichteten Linse sind bereits früher von Senff und v. Zehender mehrfach durch Näherungsmethoden bestimmt worden. Diese Rechnungen sind aber ungemein zeitraubend und geben namentlich für die Oerter der Hauptpuncte ungenaue Resultate, wenn man nur wenig Schichten annimmt. Ich werde deshalb zuerst selbst eine solche Näherungsrechnung voranschicken und dann zeigen, wie man die Oerter der Hauptpuncte und Hauptbrennpuncte auf sehr einfache Integrale zurückführen kann. § 54.

Stellen wir für die Näherungsmethode alle zur Berechnung erforderlichen Daten zusammen und denken uns die Linse in drei Schalen und einen Kern, also in sieben Schichten zerlegt von $^4/_7$ zu $^4/_7{}^{mm}$, so sind es folgende:

$$\begin{aligned} r_1 &= -r_8 = 5{,}6 & n_1 &= 1 : n_7 = 1{,}0366, \\ r_2 &= -r_7 = 4{,}0 & n_2 &= 1 : n_6 = 1{,}0118, \\ r_3 &= -r_6 = 2{,}4 & n_3 &= 1 : n_5 = 1{,}0070, \\ r_4 &= -r_5 = 0{,}8 & n_4 & = 1{,}0023. \end{aligned}$$

Wir können uns das ganze System zusammengesetzt denken aus vier einander durchdringenden gleichseitig biconvexen Linsen von den Dicken 4^{mm}, $2^6/_7{}^{mm}$, $1^5/_7{}^{mm}$ und $^4/_7{}^{mm}$. Die Linse von dem Brechungsvermögen der Corticalschicht ($n = 1{,}3854$) wollen wir die Fundamentallinse nennen und die übrigen die Kernlinsen, deren relative Brechungsindices zu der nächsten Umhüllung wir mit n_2, n_3 und n_4 bezeichnet haben. Wir beginnen mit der Berechnung der Cardinalpuncte der Fundamentallinse.

a. *Berechnung der Fundamentallinse* ($n_1 = 1{,}0366$). Gemäss (116) bis (119) ist

$$-f_1 = \varphi_1 = 77{,}48; \quad -\alpha_{1,1} = \alpha_{2,1} = 1{,}9540.$$

Ist M das Centrum der Linse, so ist $MH_{\beta,1} = +\,0{,}0460$.

b. *Berechnung der ersten Kernlinse* ($n_2 = 1{,}0118$). Es wird gefunden

$$-f_2 = \varphi_2 = 170{,}20; \quad -\alpha_{1,2} = \alpha_{2,2} = 1{,}4178.$$

Demnach ist

$$MH_{\alpha,2} = -\frac{10}{7} + 1{,}4178 = -\,0{,}0108$$

und
$$D_1 = H_{\beta,1}H_{\alpha,2} = -\,0{,}0568.$$

Der zweite Hauptpunct der Fundamentallinse liegt hinter dem ersten Hauptpuncte der ersten Kernlinse.

Aus a. und b. berechnen wir nun die Cardinalpuncte der Combination, nämlich

$$-f' = \varphi' = 53{,}242, \quad -\alpha_1' = -\,0{,}01777.$$
$$\alpha_2' = -\,0{,}3090.$$

Demnach ist

$$MH_\alpha' = 0{,}0460 - 0{,}0178 = -\,0{,}0638; \quad MH_\beta' = +\,0{,}0638.$$

c. *Berechnung der zweiten Kernlinse* ($n_3 = 1{,}0070$). Man erhält

$$-f_3 = \varphi_3 = 171{,}86; \quad -\alpha_{1,3} = \alpha_{2,3} = 0{,}8533.$$

Demnach ist

$$MH_{\alpha,3} = -\frac{6}{7} + 0{,}8533 = -\,0{,}0038,$$

und

$$D_2 = H_\beta' H_{\alpha,3} = -\,0{,}0638 - 0{,}0038 = -\,0{,}0676.$$

Der zweite Hauptpunct der ersten Combination liegt also wieder hinter dem ersten Hauptpuncte der zweiten Kernlinse.

Aus b. und c. berechnen wir die Cardinalpuncte der neuen Combination, nämlich

$$-f'' = \varphi'' = 40{,}65; \quad -\alpha_1'' = -\,0{,}01599,$$
$$\alpha_2'' = -\,0{,}0516.$$

Demnach ist

$$MH_\alpha'' = -\,0{,}0638 - 0{,}0160 = -\,0{,}0798; \quad MH_\beta'' = +\,0{,}0798.$$

d. *Berechnung des innersten Kernes* ($n_4 = 1{,}0023$). Man erhält

$$-f_4 = \varphi_4 = 174{,}06; \quad -\alpha_{1,4} = \alpha_{2,4} = 0{,}2853.$$

Demnach ist nun

$$MH_{\alpha,4} = -\frac{2}{7} + 0{,}2853 = -\,0{,}0004,$$

und
$$D_3 = H_\beta'' H_{\alpha,4} = -\,0{,}0798 - 0{,}0004 = -\,0{,}0802.$$

Aus c. und d. berechnen wir endlich die Cardinalpuncte der ganzen geschichteten Linse; nämlich

$$-f = \varphi = 32{,}58; \quad -\alpha_1 = \alpha_2 = -0{,}0152.$$

Daraus folgt

$$MH_\alpha = -0{,}0798 - 0{,}0152 = -0{,}0950; \quad MH_\beta = +0{,}0950.$$

Der Ort des ersten Hauptpunctes H_α bezüglich der Vorderfläche der Linse ist 1,9050; der des zweiten H_β 2,0950. Das Interstitium ε beträgt demnach 0,1900.

Die Hauptbrennweite der Linse beträgt $32{,}58^{mm}$, also ist der Ort des zweiten Hauptbrennpunctes $34{,}67^{mm}$ und auf das Centrum der Linse bezogen $32{,}67^{mm}$.

Diese fertige Berechnung sieht sich ziemlich harmlos an, ist aber in Wirklichkeit horribel, namentlich dann, wenn bei der Revision sich Rechenfehler zeigen. Ich habe auf diese Näherungsrechnung mehrere der früher entwickelten Methoden anzuwenden versucht, bin aber zu der gewöhnlichen, welche von Fläche zu Fläche fortschreitet, wieder zurückgekehrt. Die Gauss'schen Kettenfunctionen können hierzu nicht empfohlen werden, welche v. Zehender benutzt hat. Eher sind noch die Formeln (53) und (54) verwendbar. Es ist vielleicht der obige Versuch der letzte, da die Integralmethode sehr rasch zum Ziele führt und äusserst einfache Beziehungen zwischen der Natur der Linse und ihrer Cardinalpuncte erkennen lässt. Ehe wir zur Herleitung der Integrale schreiten, wollen wir die zweite Aufgabe dieses Paragraphen, die Berechnung des totalen Brechungsvermögens oder des imaginären Index der geschichteten Linse lösen. Es ist nämlich

$$\varphi = \frac{n r_1^2}{(n-1)\,[2 n r_1 - (n-1)\, d]}$$

nach n aufzulösen. Setzen wir 32,58 an die Stelle von φ, 5,6 an die Stelle von r_1, 4 an die Stelle von d, so ergibt sich die nach Potenzen von n geordnete quadratische Gleichung

$$n^2 - \frac{135{,}616}{234{,}576}\, n - \frac{130{,}32}{234{,}576} = 0.$$

Löst man dieselbe auf, so erhält man $n = 1{,}0885$. Dies ist der relative Index bezüglich Glaskörper. Multiplicirt man n mit 1,3365, so wird

$$N = 1{,}4548.$$

Verwandelt man diesen Decimalbruch in einen Kettenbruch, so erhält man die Näherungswerthe

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{16}{11}, \frac{515}{354}, \ldots$$

Der dritte Näherungswerth stimmt merkwürdigerweise genau mit dem

Totalindex von Listing überein. Eine so schöne Bestätigung der Zuverlässigkeit der zu Grunde gelegten Annahmen durfte kaum erwartet werden.

Wir wollen jetzt die Integrationsmethoden für die Berechnung der Cardinalpuncte entwickeln.

Ist $\frac{1}{\varphi}$ der reciproke Werth der Brennweite des Systems, so ist der Zuwachs derselben für ein Kernlinsenelement

$$\varDelta\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{2\,(n_1 - n_0)}{n_0 r} - \frac{(n_1 - n_0)^2 d}{n_0 n_1 r^2}.$$

Wir fanden nun durch Beobachtung, dass der absolute Brechungsindex irgend einer Schale sich ausdrücken lässt durch

$$N = N_m - a\left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

wo N_m den Index des Kernes bezeichnet. Ist N_0 der absolute Brechungsindex des umgebenden Mediums (Glaskörper), so ist der relative Index

$$n_0 = \frac{N_m - a\left(\frac{y}{b}\right)^2}{N_0}$$

und für die unendlich nahe Kernlinse

$$n_1 = \frac{N_m - a\left(\frac{y + \varDelta y}{b}\right)^2}{N_0}.$$

Setzen wir an Stelle der Differenzen die Differenziale, so folgt aus den Gleichungen

$$\operatorname{Lim}\left(\frac{n_1 - n_0}{n_0}\right) = \partial n = -\frac{2a}{N_m} \cdot \frac{y\,\partial y}{b^2}$$

und

$$\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{-4\,a\,y\,\partial y}{\left[N_m - a\left(\frac{y}{b}\right)^2\right] r \,.\, b^2} - P\,(\partial y)^2. \qquad (140)$$

In dieser Differenzialgleichung kann das zweite Glied zur Rechten als eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung vernachlässigt werden.

Es ist nun weiter vorausgesetzt

$$r = r_1 \frac{y}{b},$$

folglich ist

$$\frac{1}{\varphi} = \int_0^b \frac{4a\,\partial\left(\frac{y}{b}\right)}{r_1\left[N_m - a\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]} + C,$$

oder

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2a}{r_1 \sqrt{N_m\,a}} \log \operatorname{nat} \frac{\sqrt{N_m} + \sqrt{a}}{\sqrt{N_m} - \sqrt{a}} + C,$$

wo C die reciproke Brennweite der Fundamentallinse mit dem Brechungsindex 1,0288 oder $\frac{1,3750}{1,3365}$ bedeutet. Hieraus folgt, dass die Wirkung der Schichtung allein abhängig ist von dem Krümmungsradius r_1 der Vorderfläche und dem Verhältniss von a zu N_m. Drücken wir dasselbe durch z aus, so ist

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2\sqrt{z}}{r_1} \log \text{nat} \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} + C. \qquad (141)$$

Da z immer verhältnissmässig sehr klein ist, so kann man setzen

$$\log \text{nat} \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}$$

und

$$\frac{1}{\varphi} = 4\frac{z}{r_1} + C. \qquad (142)$$

Unsere Messungen ergeben nun

$$a = 0{,}040, \quad N_m = 1{,}4150, \quad r_1 = 5{,}6.$$

Demgemäss ist für

das menschliche Auge $z = 0{,}02827$,
das Ochsenauge . . $z = 0{,}06360$,
das Elephantenauge . $z = 0{,}05486$.

Setzen wir die Zahlenwerthe ein, so erhalten wir für die geschichtete Linse des menschlichen Auges

$$\frac{1}{\varphi} = 0{,}02038 + C = \frac{1}{49{,}05} + \frac{1}{C}.$$

Den Werth C berechnen wir aus der Gleichung für eine gleichseitige biconvexe Linse:

$$\frac{2(n-1)}{r_1} - \frac{(n-1)^2 d}{n r_1^2},$$

worin $n = 1{,}0288$, $r_1 = 5{,}6$ und $d = 4$ zu setzen ist. Man erhält

$$C = 0{,}01019 = \frac{1}{98{,}13}.$$

Demnach ist

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{49{,}05} + \frac{1}{98{,}13} = \frac{1}{32{,}71},$$

und die Brennweite der geschichteten Linse im Glaskörper

$$\varphi = 32{,}71^{mm}$$

in fast genauer Uebereinstimmung mit dem durch die Näherungsmethode berechneten Werthe 32,58.

Bezeichnen wir die Brennweite der Fundamentallinse mit φ', die die der Kernlinse mit φ'', so ist für das menschliche Auge

$$\varphi' = 2\varphi''.$$

Hieraus geht hervor, dass die Wirkung der Schichtung der Linse

genau die dreifache ist von derjenigen, welche die Linse haben würde, wenn sie nur das Brechungsvermögen der äussersten Corticalschicht oder der Linsenkapsel besässe. Es ist $\varphi = \frac{1}{3}\varphi'$.

Nimmt man an, die Linse sei homogen und habe das Brechungsvermögen des innersten Kernes, also $n_4' = 1{,}0585$, so wird die Brennweite φ''' gleich 48,0, also beinahe φ''. Demnach hat die Kernlinse allein schon die Wirkung einer gleichgeformten homogenen Linse von der Dichtigkeit des innersten Kernes.

Da nun das Brechungsvermögen der äussersten Corticalschicht für alle Augen constant und zwar nahe gleich 1,3750 ist, so ist demnach im Zustande der stärksten Accommodation für die Nähe

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{4z + 0{,}0576}{r_1}.$$

Für die menschliche Krystalllinse ist $z = 0{,}02827$ und

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{0{,}1706}{5{,}6} = \frac{1}{32{,}71}.$$

Nehmen wir an, dass die Linse des Ochsenauges bei stärkster Accommodation auch gleichseitig wird und zwar $r_1 = 10^{mm}$, so ist für die Krystalllinse des Ochsenauges

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{0{,}3120}{10} = \frac{1}{32{,}05}, \quad \varphi' = 160, \quad \varphi'' = 39{,}4.$$

Das vorstehende wichtige Theorem über die Wirkung der geschichteten Krystalllinse lässt sich allgemein auch so ausdrücken:

Ist N_0 der absolute Brechungsindex des umgebenden Mediums (Glaskörper), N_1 der der äussersten Schale, N_m der des innersten Kernes, r_1 der Krümmungsradius der äussersten Schale, so ist

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2\,(N_0 N_m - 2\,N_0 N_1 + N_1 N_m)}{N_0 N_m r_1}. \qquad (143)$$

Für die menschliche Linse ist

$$N_0 = 1{,}3350, \quad N_1 = 1{,}3750, \quad N_m = 1{,}4150.$$

Diese Indices differiren untereinander um 0,0400. Setzt man sie in die Formel ein, so liefert sie den Werth $\varphi = 32{,}60$ und den totalen Brechungsindex 1,4545 oder $\frac{16}{11}$.

Wir haben somit die Hauptbrennweiten der geschichteten Linse auf ein bestimmtes Integral zurückgeführt. Es bleibt nun übrig, die zweite Aufgabe zu lösen und den Abstand der Hauptpuncte der geschichteten Linse vom Centrum auf ein bestimmtes Integral zu reduciren. Wir führen zu diesem Zwecke folgende Bezeichnungen ein:

φ' sei die positive Brennweite der Fundamentallinse,
φ'' die positive Brennweite der heterogenen Kernlinse,

φ die positive Brennweite der ganzen Linse,
$H_{\alpha,1} H_{\beta,1}$ die Hauptpuncte der Fundamentallinse,
$H_{\alpha,2} H_{\beta,2}$ die Hauptpuncte der Kernlinse,
$H_\alpha H_\beta$ die Hauptpuncte der geschichteten Linse,
$H_1 H_2$ die Hauptpuncte irgend eines Kernlinsenelements.

Ferner bezeichnen wir

$MH_{\beta,1}$ mit u, $H_{\beta,1} H_\beta$ mit α, $H_{\beta,1} H_{\beta,2}$ mit β.

Wir gehen aus von der allgemeinen Formel

$$\alpha_1 = \frac{-f_1 D}{f_2 - \varphi_1 + D} = \frac{-\varphi_1 D}{\varphi_2 + \varphi_1 - D}.$$

Indem wir die Integration des Werthes α von aussen nach innen vornehmen und berücksichtigen, dass H_β variabel bleibt mit α, und dass absolut genommen $H_{\beta,1} H_\beta$ stets gleich $H_{\alpha,1} H_\alpha$ bleibt, haben wir für einen unendlich kleinen Zuwachs α_1 der Kernlinse $\partial \alpha$ an die Stelle von α_1 zu setzen. φ_1 ist die variabele Brennnweite des Systems, also allgemein φ, φ_2 die Brennweite des Kernlinsenelementes, also

$$\frac{1}{\varphi_2} = \partial\left(\frac{1}{\varphi}\right).$$

Da φ_1 und D endliche Grössen bleiben, so ist die Differenzialgleichung

$$\partial \alpha = -D \cdot \varphi \, \partial\left(\frac{1}{\varphi}\right),$$

indem wir α positiv nehmen von dem Hauptpuncte $H_{\beta,1}$ an gerechnet.

Es ist nun

$$-D = -H_\beta H_1 = MH_\beta + MH_1 = MH_{\beta,1} + H_{\beta,1} H_\beta + MH_1,$$

oder

$$-D = u + \alpha + MH_1.$$

H_1 ist nun der erste Hauptpunct des Kernlinsenelements.

Bei einer Linse vom Brechungsexponenten 1,0000, wie sie das Kernlinsenelement darstellt, liegen die Hauptpuncte im Centrum. Es ist nämlich

$$\alpha_{1,1} = -\frac{d}{2n} = -y,$$

wo y die halbe Axe des Kernlinsenelementes bezeichnet. Es ist folglich MH_1 gleich Null und

$$\frac{\partial \alpha}{u + \alpha} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right)}{\frac{1}{\varphi}}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$(u + \alpha)\,\varphi = C.$$

Um die Constante C zu bestimmen, berücksichtigen wir, dass $\alpha = 0$ wird für $\varphi = \varphi'$. Daraus folgt

$$(u + \alpha)\,\varphi = u\varphi', \tag{144}$$

worin $u + \alpha$ den Abstand des Hauptpunctes der geschichteten Linse vom Centrum bezeichnet. α und $u + \alpha$ können also aus dieser äusserst einfachen Formel berechnet werden, sobald u, φ und φ' bekannt sind.

Die numerischen Werthe, welche wir oben durch die Näherungsrechnung erhielten, bestätigen das Theorem. Es ist nahezu

$$77{,}48 \cdot 0{,}0460 = 53{,}24 \cdot 0{,}0638 = 40{,}65 \cdot 0{,}0798 = 32{,}58 \cdot 0{,}0950.$$

Wir haben zur Berechnung von $u + \alpha$ die Constanten u, φ und φ' einzusetzen. Für die Fundamentallinse finden wir

$$\varphi' = 98{,}13, \quad u = 0{,}0372.$$

Die Hauptbrennweite φ ergab sich ausserdem gleich 32,58. Demnach ist für variabele α und φ

$$(u + \alpha)\,\varphi = 0{,}0372 \cdot 98{,}13$$

und für $\varphi = 32{,}58$

$$u + \alpha = 0{,}1120; \quad \alpha = 0{,}0748.$$

Die Näherungsrechnung ergab für $u + \alpha$ den ungenauen Werth 0,0950. Für die systematische Linse von einem Brechungsindex $^{16}/_{11}$ würde sein $u + \alpha = 0{,}1064$. In der geschichteten Linse liegen also in Wirklichkeit die Hauptpuncte etwas weiter auseinander. Indess ist diese Abweichung sehr gering, so dass man in der That keinen merklichen Fehler begeht, wenn man eine homogene Linse vom Index $^{16}/_{11}$ für die geschichtete Linse substituirt. Das Integral der Hauptpunctdistanz

$$H_\alpha H_\beta = 2\,(u + \alpha) = 2u\,\frac{\varphi'}{\varphi}$$

gibt aber noch Veranlassung zu einer Reihe von andern interessanten Bemerkungen.

Aus der Formel folgt zunächst, dass α positiv ist, wenn $\varphi' > \varphi$, also das Brechungsvermögen von aussen nach innen zunimmt. In diesem Falle entfernen sich die Hauptpuncte vom Centrum. Nimmt dagegen das Brechungsvermögen in demselben Grade von aussen nach innen ab, so nähern sie sich dem Centrum. Ist das Brechungsvermögen der homogenen Linse gleich 1,000, so wird φ unendlich, $\alpha = -u$, d. h. die Hauptpuncte fallen im Centrum zusammen. Wächst das Brechungsvermögen, so nähern sie sich den zugehörigen Flächen.

Wenn $\varphi = \frac{1}{3}\varphi'$ wird, so wird $\alpha = 2u$. Dieser Fall findet bei der Krystalllinse des menschlichen Auges Statt. Es ist also

$$MH_{\beta,1} = u, \quad MH_\beta = 3u.$$

Dies wird durch die oben berechneten Zahlenwerthe bestätigt:

$$MH_{\beta,1} = 0{,}0372, \quad MH_\beta = 0{,}1120.$$

Es ist nun zu bemerken, dass die Brennweite φ der ganzen Linse etwas abhängig ist von α und also einer kleinen Correction bedarf. Wir wollen deshalb sämmtliche Formeln hersetzen, welche zu einer genauen Bestimmung von φ und $u + \alpha$ führen.

$$\text{I.} \quad u = \frac{d}{2} - \frac{r_1 d}{2nr_1 - (n-1)d},$$

$$\text{II.} \quad \frac{1}{\varphi''} = \frac{2\sqrt{z}}{r_1} \log \text{nat} \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} = \frac{4z}{r_1}\left(1 + \frac{1}{3} z\right),$$

$$\text{III.} \quad \frac{1}{\varphi'} = \frac{2(n-1)}{r_1} - \frac{(n-1)^2 d}{nr_1^2},$$

$$\text{IV.} \quad \varphi = \frac{\varphi' \varphi''}{\varphi'' + \varphi' + (2u + \beta)},$$

$$\text{V.} \quad -\alpha = \frac{-\varphi'(2u+\beta)}{\varphi'' + \varphi' + (2u+\beta)} = H_{\alpha,1} H_\alpha = -H_{\beta,1} H_\beta,$$

$$\text{IV.} \quad (u + \alpha)\varphi = u\varphi'.$$

Setzen wir den Werth $2u + \beta$ aus V in IV ein, so erhalten wir

$$\varphi = \frac{\varphi'\varphi''}{\varphi' + \varphi''} \cdot \frac{\varphi'}{\varphi' + \alpha}.$$

Es ist also φ etwas kleiner als der berechnete Werth 32,58.

Setzen wir den corrigirten Werth von φ in VI ein, so wird

$$\alpha = \frac{u}{1-u} \cdot \frac{\varphi'}{\varphi''}.$$

Da u gegen die Einheit sehr klein ist, so erhält man wieder die Gleichung

$$\alpha = u \frac{\varphi'}{\varphi''}. \qquad (145)$$

Für das menschliche Auge ist $\varphi' = 2\varphi''$, also $\alpha = 2u$.

Wir sind nun auch im Stande, den Abstand $H_{\beta,1} H_{\beta,2} = \beta$ des Hauptpunctes der Kernlinse von dem gleichnamigen Hauptpuncte der Fundamentallinse zu bestimmen. Aus V erhält man nämlich

$$2u + \beta = \alpha \frac{\varphi' + \varphi''}{\varphi'} = u + \alpha,$$

oder auch

$$\beta = \alpha \frac{\varphi' + \varphi''}{\varphi'} - 2u = u \frac{\varphi' - \varphi''}{\varphi''} = \alpha - u. \qquad (146)$$

Für das menschliche Auge ist $\alpha = 2u$, also $\beta = u$. Wir erhalten somit die harmonischen Verhältnisse

$$MH_{\beta,2} = u + \beta = 2u, \quad MH_\beta = u + \alpha = 3u$$

oder

$$MH_{\beta,1} : MH_{\beta,2} : MH_\beta = 1 : 2 : 3.$$

Stellen wir mit diesen Dimensionen die zugehörigen Brennweiten zusammen, so ergibt sich

$$H_{\alpha,1} H_{\beta,1} : H_{\alpha,2} H_{\beta,2} : H_\alpha H = \frac{1}{\varphi'} : \frac{1}{\varphi''} : \frac{1}{\varphi}. \qquad (147)$$

In Worten lautet dies Theorem: Die gegenseitigen Abstände der conjugirten Hauptpuncte verhalten sich wie die reciproken Brennweiten.

Wenn in der Hauptpunctsgleichung VI

$$(u + \alpha)\,\varphi = u\varphi'$$

die Constante u gleich Null ist, d. h. die Fundamentallinse das Brechungsvermögen 1,000 hat, so dass dieses beim Uebergange aus Kammerwasser oder Glaskörper in die Linse sich nicht discontinuirlich verändert, so kann die Constante $u\varphi'$ auf diese Weise nicht bestimmt werden. Sie nimmt alsdann den unbestimmten Werth $0 . \infty$ an. Dieser lässt sich aber berechnen, wenn man für u und φ' die allgemeinen Ausdrücke einsetzt; es ist nämlich gemäss

$$\text{I.} \quad u = \frac{d\,(n-1)\,(2r_1 - d)}{2\,[2nr_1 - (n-1)\,d]},$$

$$\text{III.} \quad \varphi' = \frac{nr_1^2}{(n-1)\,[2nr_1 - (n-1)\,d]}.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen miteinander, so resultirt der Ausdruck

$$u\varphi' = \frac{nr_1^2\,(2r_1 - d)\,d}{2\,[2nr_1 - (n-1)\,d]^2}.$$

Da in unserm speciellen Falle $n = 1{,}0000$ angenommen wird, so erhält man für α die Relation

$$\alpha\varphi = \frac{d}{8}\,(2r_1 - d). \qquad (148)$$

In diesem Ausdruck ist φ die Brennweite der Kernlinse also gleich φ'' und α gleich $H_{\beta,1}H_\beta$. Demnach wird

$$\alpha = MH_\beta - MH_{\beta,1} = (u + \alpha) - u.$$

Da aber $MH_{\beta,1}$ jetzt gleich Null ist, so geht α in $MH_{\beta,2}$ über.

Setzen wir nämlich die Zahlenwerthe $r_1 = 5{,}6$, $d = 4$ und $\varphi = \varphi'' = 49{,}03$ ein, so wird $MH_{\beta,2} = \alpha = 0{,}0734$. Wir fanden oben den Werth 0,0744.

§ 55. **Berechnung der Cardinalpuncte und des totalen Brechungsvermögens der für die Ferne accommodirten geschichteten Linse des menschlichen Auges.** Bei der Accommodation des Auges für die Ferne wird die hintere Hälfte der Linse nur unmerklich in ihrer Form verändert. Wir werden also für diese dasselbe Integral der Brennweite erhalten.

Anders verhält es sich mit der vordern Linsenhälfte. Wenn die Contraction der Circularfasern des Ciliarmuskels nachlässt, tritt eine Spannung der zonula Zinnii ein und die vordere

festere Linsenkapsel wird straff centrifugal angespannt. Dabei tritt die Vorderfläche der Linse um etwa $0{,}4^{mm}$ zurück. Hierdurch wird offenbar eine Erweiterung der vorderen Augenkammer herbeigeführt, die wahrscheinlich durch das von Becker*) an albinotischen Augen beobachtete Vorrücken der Ciliarfortsätze ausgeglichen wird. Becker bringt diese Bewegungen der Ciliarfortsätze mit hämatostatischen Veränderungen in Zusammenhang. Den Beobachtungen von Becker widerstreiten freilich andere von Coccius. Es verdient wohl der Umstand Beachtung, dass bei der Abplattung der Linse aus mathematischen Gründen zugleich eine Oberflächenvergrösserung stattfinden muss und umgekehrt, dass eine Oberflächenverminderung Vermehrung der Convexität zur Folge haben muss.

Bei der Berechnung der Brennweite der accommodationslosen Linse gehen wir von folgenden Daten aus:

Der Krümmungshalbmesser der vorderen Linsenfläche	$r_1 = 10{,}0^{mm}$
- - - hinteren -	$r_2 = 6{,}0$
die vordere Axenhälfte bis zum Durchmesser	$b_1 = 1{,}6$
- hintere - - - -	$b_2 = 2{,}0$

Da die vordere Linsenkapsel bei ihrer Abflachung einen Druck auf die tiefer liegenden weichen Schichten ausübt, so werden die Schalen derselben nach Verhältniss ihrer Krümmung ebenfalls abgeplattet. Wir nehmen an, es sei von dem Scheitel der Vorderfläche bis zum Centrum der Krümmungsradius

$$r = r_1 \frac{y}{b_1},$$

und die Krümmungsradien der Schalen der zweiten Linsenhälfte wie früher bestimmt durch die Relation

$$r = r_2 \frac{y}{b_2}.$$

In diesen beiden Gleichungen bezeichnen jetzt die Grössen b_1 und b_2 die beiden Halbaxen und y die Entfernung einer brechenden Schalenfläche vom Centrum. Das Brechungsvermögen einer unendlichen dünnen Schale ist alsdann in der vordern Linsenhälfte

$$N = N_m - a \left(\frac{y}{b_1}\right)^2$$

und in der hinteren Linsenhälfte

$$N = N_m - a \left(\frac{y}{b_2}\right)^2.$$

Wir berechnen die dioptrische Wirkung beider Linsenhälften gesondert. Nach dem vorigen Abschnitte ist der reciproke Werth der Brennweite der hinteren Hälfte

*) Donders Anomalien 1866. S. 25 und Aubert, Physiol. Opt. S. 451.

$$\frac{1}{\varphi_2} = \int_0^b \frac{2a\partial\left(\frac{y}{b_2}\right)}{r_2\left[N_m - a\left(\frac{y}{b_2}\right)^2\right]} + \frac{(n-1)-d}{r_2}$$

oder nahezu $$\frac{1}{\varphi_2} = \frac{2z + (n-1)}{r_2}.$$

Setzen wir die Zahlenwerthe $z = 0{,}02827$, $n = 1{,}0288$ und $r_2 = 6{,}0^{mm}$ ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{\varphi_2} = 0{,}01422 = \frac{1}{70{,}32}.$$

Für die vordere Hälfte erhalten wir analog

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{2z + (n-1)}{r_1},$$

und wenn $z = 0{,}02827$, $n = 1{,}0288$, $r_1 = 10{,}0^{mm}$ eingesetzt wird,

$$\frac{1}{\varphi_1} = 0{,}00853 = \frac{1}{117{,}23}.$$

Für die ganze Linse ist demnach der reciproke Werth der Brennweite

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} = [2z + (n-1)]\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \qquad (149)$$

wo r_1 und r_2 die absoluten Werthe sind. Es ist also

$$\frac{1}{\varphi} = 0{,}02275 = \frac{1}{43{,}96}.$$

Dieser Werth von φ stimmt sehr gut mit den sonst angegebenen Werthen überein. Berechnet man daraus den imaginären Brechungsindex der geschichteten Linse, so findet man ebenfalls $n = \frac{16}{11}$.

Bezeichnet man hier wieder wie oben die Brennweite der Fundamentallinse mit φ', die der Kernlinse mit φ'', so ist gemäss (116)

$$\varphi' = \frac{r_1 r_2 n}{(n-1)\,[n\,(r_1 + r_2) - (n-1)\,d]},$$

und wenn wir die Zahlenwerthe $r_1 = 10$, $r_2 = 6$, $d = 3{,}6$, $n = 1{,}0288$ substituiren, so finden wir

$$\frac{1}{\varphi'} = 0{,}00768 = \frac{1}{130{,}2}.$$

Ferner ist $$\frac{1}{\varphi''} = \frac{2z}{r_1} + \frac{2z}{r_2} = 0{,}01508 = \frac{1}{66{,}35}.$$

Also auch bei der Accommodation in die Ferne ist

$$\varphi' = 2\varphi'', \quad \varphi = \tfrac{1}{3}\varphi'.$$

Nimmt man auch noch an, die Linse sei homogen und habe das Brechungsvermögen des innersten Kernes, also $n_4' = 1{,}0585$, so wird die Brennweite φ''' gleich 64,1, also beinahe wieder gleich φ'', d. h. die Kernlinse hat allein schon die Wirkung einer gleichgeformten Linse von der Dichtigkeit der innersten Kernsubstanz.

Stellen wir die für die beiden Zustände der Linse gewonnenen Resultate zusammen, so finden wir

a. *bei der accommodirten geschichteten Linse:*
$\varphi = 32{,}71, \quad \varphi' = 98{,}13, \quad \varphi'' = 49{,}05, \quad \varphi''' = 48{,}0.$

b. *bei der accommodationslosen geschichteten Linse:*
$\varphi = 43{,}96, \quad \varphi' = 130{,}2, \quad \varphi'' = 66{,}35, \quad \varphi''' = 64{,}1.$

Es verhält sich demnach

$$\frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi''} : \frac{1}{\varphi'} = 3 : 2 : 1,$$

oder in Worten: die Brennweite der Kernlinse ist das harmonische Mittel zwischen der wirklichen Brennweite der geschichteten Linse und der Brennweite der Fundamentallinse.

Es bleibt noch übrig, die Abstände der beiden Hauptpuncte vom Centrum der geschichteten Krystalllinse zu finden. Diese Aufgabe ist ungleich schwieriger, als für den Fall der accommodirten und gleichseitig biconvexen Linse. Sie lässt sich aber auch theilweise auf die Bestimmung eines Integrales reduciren.

Zu dem Zwecke theilen wir die Linse wieder durch den Aequatorialschnitt in zwei Hälften. Es sei also vorausgesetzt:

$$r_1 = 10{,}0, \quad b_1 = 1{,}6; \quad r_2 = 6{,}0, \quad b_2 = 2{,}0.$$

Bedeuten u_1 und u_2 die Abstände der Hauptpuncte der ungleichseitigen Fundamentallinse mit dem Brechungsindex $n = 1{,}0288$ vom Centrum M im Durchmesser, so gelten zunächst folgende Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} MH_{\alpha,1} = u_1 = b_1 - \dfrac{r_1\,(b_1 + b_2)}{n\,(r_1 + r_2) - (n-1)\,d}, \\ MH_{\beta,1} = u_2 = b_2 - \dfrac{r_2\,(b_1 + b_2)}{n\,(r_1 + r_2) - (n-1)\,d}, \\ 1 : H_{\alpha,1}H_{\beta,1} = 1 : (u_1 + u_2) = \dfrac{1}{(n-1)\,d}\left\{ n + \dfrac{d}{r_1 + r_2 - d} \right\}. \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \frac{1}{\varphi''} = \frac{(r_1 + r_2)}{r_1 r_2} \sqrt{z} \log \text{nat} \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}.$$

$$\text{III.} \quad \frac{1}{\varphi'} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}(n-1) - \frac{(n-1)^2\,d}{n r_1 r_2}.$$

$$\text{IV.} \quad \varphi = \frac{\varphi'\varphi''}{\varphi'' + \varphi' + (u_1 + u_2 + \beta_1)}, \quad \beta_1 = H_{\alpha,1}H_{\alpha,2}.$$

$$\text{V.} \quad \alpha_1 = \frac{-\varphi'\,(u_1 + u_2 + \beta_1)}{\varphi'' + \varphi' + (u_1 + u_2 + \beta_1)} = H_{\alpha,1}H_{\alpha}.$$



Fig. 61.

In nebenstehender Figur ist die gegenseitige Stellung der drei Hauptpuncte für die ganze Linse dargestellt. $MH_{\alpha,1} = u_1$, $MH_{\beta,1} = u_2$, $H_{\alpha,1}H_{\alpha,2} = \beta_1$, $H_{\beta,1}H_{\beta,2} = \beta_2$, $H_{\alpha,1}H_\alpha = \alpha_1$, $H_{\beta,1}H_\beta = \alpha_2$. Die Puncte sind sämmtlich äquidistant bei der accommodirten Linse.

Um zu allgemeinen Ausdrücken für die Lage der beiden Hauptpuncte $H_\alpha H_\beta$ der geschichteten Linse zu gelangen, ist zunächst

mehreres über die Lage und geometrische Form der Kernschichtung festzustellen. Bei meinen Messungen an todten Ochsenaugenlinsen fand ich, dass zwar der Kern näher an der Vorderfläche als an der Hinterfläche liegt im Verhältniss der Abstände 4 : 5, dass jedoch das Verhältniss von Axe und Durchmesser immer constant gleich 2 : 3 bleibt. Setzen wir, auf diesen Umstand uns stützend, voraus, dass die Krümmungen der Schalen den Abständen vom Mittelpunct M des Durchmessers proportional sind, so würde ein Axenschnitt der Linse folgende Gestalt haben und zwar in zehnfacher Vergrösserung (Fig. 62).

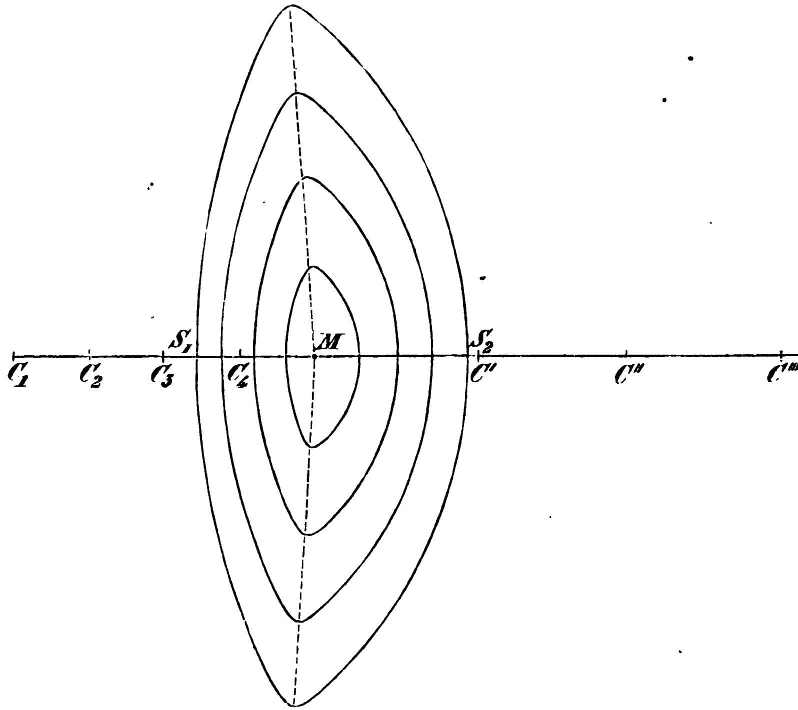


Fig. 62.

Wir können uns eine solche Linse, welche der wirklichen wol am besten entsprechen würde, wieder bestehend denken aus einer Fundamentallinse vom relativen Brechungsindex $n = 1{,}0288$ und der Kernlinse mit variabelem Brechungsindex, von welcher der Brechungsindex ihres ersten Elements gleich 1 zu setzen ist. Ist ∂n der Zuwachs der relativen Brechungsindices von Schale zu Schale, so ist, wie früher gezeigt ist,

$$\partial n = -\frac{2a}{N_0} \cdot \frac{y \partial y}{b^2}.$$

Es hat nun die Fundamentallinse ihre eigenen Cardinalpuncte und ebenso die Kernlinse. Durch Combination derselben erhalten

wir, wenn beide bekannt sind, die Oerter der Cardinalpuncte der ganzen geschichteten Linse. Diejenigen des ersten Systems sind leicht zu finden, schwieriger ist die Bestimmung der zweiten Gattung.

Um nun vorläufig die Art der Verrückung der Hauptpuncte der Fundamentallinse durch das Hinzutreten des Kernes in der Idee zu fixiren, nehmen wir einstweilen eine homogene Kernlinse an. Die Axe derselben möge gleich der halben Axe der Fundamentallinse und die relative Dichtigkeit gleich der des innersten Kernes sein, also $n = 1{,}0291$. Wir finden dann

a. *für die Fundamentallinse* $S_1 S_2$:

$-f_1 = \varphi_1 = 130{,}2$; $\alpha_{1,1} = -2{,}201$, $\alpha_{2,1} = 1{,}3205$; $\varepsilon_1 = 0{,}0785$.

Mithin ist

$$S_1 H_{\alpha,1} = 2{,}201, \quad S_2 H_{\beta,1} = 1{,}32 \text{ oder } S_1 H_{\beta,1} = 2{,}28.$$

b. *für die Kernlinse* $S_3 S_4$:

$-f_2 = \varphi_2 = 66{,}35$; $\alpha_{2,1} = -1{,}10$, $\alpha_{2,2} = 0{,}66$, $\varepsilon_2 = 0{,}04$.

Mithin ist

$$S_3 H_{\alpha,2} = 1{,}10, \quad S_4 H_{\beta,2} = 0{,}66.$$

Wir combiniren die beiden Systeme und suchen die Oerter der Hauptpuncte $H_\alpha H_\beta$. Es ist

$$H_{\beta,1} H_{\alpha,2} = D = -0{,}38,$$
$$\alpha_1 = +0{,}235, \quad \alpha_2 = -0{,}141.$$

Da α_1 von $H_{\alpha,1}$ nach vorne, α_2 von $H_{\beta,2}$ nach rechts zu nehmen ist, so wird

$$S_1 H_\alpha = S_1 H_{\alpha,1} - \alpha_1 = 2{,}201 - 0{,}235 = 1{,}966;$$
$$S_1 H_\beta = S_1 H_{\beta,2} - \alpha_2 = 1{,}940 + 0{,}141 = 2{,}081;$$
$$\varepsilon = 0{,}115.$$

Es ist also nahezu $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Das Interstitium der Fundamentallinse wird durch die Kernschichtung vergrössert. Die beiden Hauptpuncte der ersten Linse gehen nach vorn und nähern sich dem Kerne. Bezeichnen wir $H_\alpha H_{\alpha,1}$ mit α und $H_{\beta,1} H_\beta$ mit β, so ist

$$\alpha = +0{,}235, \quad \beta = +0{,}20, \quad \varDelta\varepsilon = 0{,}035,$$

also α sowol wie β negativ.

Vergleichen wir unsere Resultate mit den Constanten des schematischen Auges von Helmholtz, so war bei diesem

$$S_1 H_\alpha = 2{,}107, \quad S_1 H_\beta = 2{,}336, \quad \varepsilon = 0{,}229.$$

Das Interstitium ist doppelt so gross und die Hauptpuncte liegen beide hinter den unsrigen.

Wir wollen jetzt an einem Beispiele zeigen, welcher Hypothese über die Lage des Kernes die gewöhnliche Bestimmung der beiden Haupt-

puncte entsprechen würde. Es wird sich zeigen lassen, dass man der Wirklichkeit zuwider den Kern in die hintere Hälfte der Linse verlegen müsste.

Wir haben bereits die Hauptpuncte für die Fundamentallinse von dem Brechungsindex $n = 1{,}0288$ bestimmt; ihre Lage ist

$$S_1 H_{\alpha,1} = 2{,}20, \quad S_2 H_{\beta,1} = 1{,}32.$$

Wir berechnen dazu das erste Kernlinsenelement von derselben Axe und Krümmung der Oberfläche. Der relative Brechungsindex bezogen auf die Fundamentallinse ist $n = 1{,}0000$. Die Lage seiner Hauptpuncte ist absolut genommen.

$$S_1 H_1 = 2{,}25, \quad S_2 H_2 = 1{,}35.$$

H_1 und H_2 coincidiren zwischen den Hauptpuncten $H_{\alpha,1}$ und $H_{\beta,1}$ der Fundamentallinse und diesen Punct M (Fig. 63) wollen wir als Mittelpunct des Kernes betrachten. Seine Abstände von den Flächen verhalten sich *direct* wie deren Krümmungsradien, während bei der

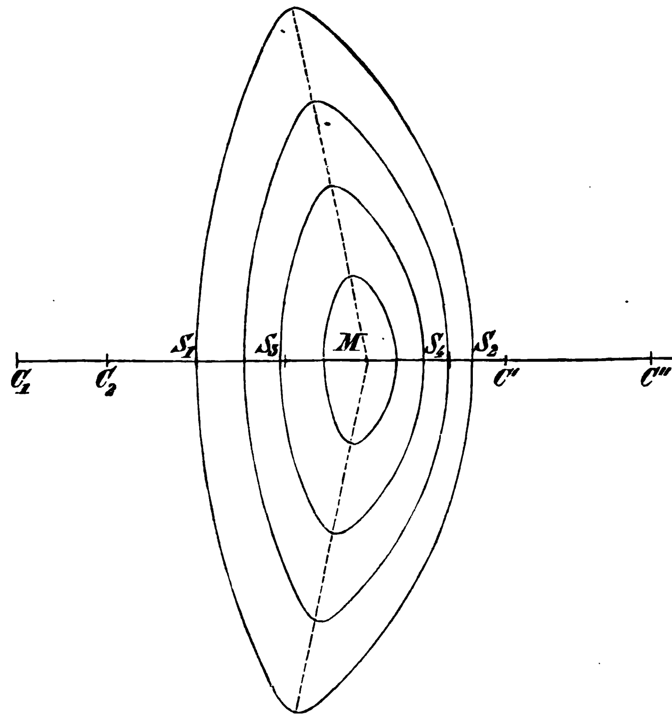


Fig. 63.

ersten auf Beobachtung gegründeten Hypothese diese Abstände von den Flächen sich nahezu *umgekehrt* wie die Wurzeln aus den Krümmungsradien verhalten.

Wir nehmen wiederum an, dass Kern- und Fundamentallinse

wieder einander ähnlich seien und dass die hinzutretende Kernlinse homogen und von der oben angegebenen Beschaffenheit sei. Der Kern erscheint also als nach der entgegengesetzten hinteren Seite verschoben. Bei variabeler Dichtigkeit würde in diesem Falle ein Axenschnitt der Linse in nebenstehender Gestalt erscheinen.

a. *für die Fundamentallinse* ist wie oben

$$-f_1 = \varphi_1 = 130{,}2, \quad \alpha_{1,1} = -2{,}201, \quad \alpha_{2,1} = 1{,}3205, \quad \varepsilon_1 = 0{,}080.$$

und $$S_1 H_{\alpha,1} = 2{,}201, \quad S_1 H_{\beta,1} = 2{,}28.$$

b. *für die Kernlinse* $S_3 S_4$ fanden wir

$$-f_2 = \varphi_2 = 66{,}35, \quad \alpha_{2,1} = -1{,}10, \quad \alpha_{2,2} = 0{,}66, \quad \varepsilon_2 = 0{,}04;$$
$$S_3 H_{\alpha,2} = 1{,}10, \quad S_3 H_{\beta,2} = 1{,}14.$$

Wir combiniren auch diese Systeme und suchen die Oerter der Hauptpuncte $H_\alpha H_\beta$. Es ist jetzt

$$H_{\beta,1} H_{\alpha,2} = D = -0{,}055,$$
$$\alpha_1 = +0{,}037, \quad \alpha_2 = -0{,}018.$$

Demgemäss ist

$$S_1 H_\alpha = S_1 H_{\alpha,1} - \alpha_1 = 2{,}163;$$
$$S_1 H_\beta = S_1 H_{\beta,2} - \alpha_2 = 2{,}283; \quad \varepsilon = 0{,}120; \quad \alpha = -0{,}037, \quad \beta = +0{,}003.$$

Mit diesen Zahlenwerthen stimmen die nach den bisherigen Methoden berechneten sehr gut. Die Abstände der Hauptpuncte von den nächsten Flächen verhalten sich wie die Krümmungsradien. Die Verrückungen der Hauptpuncte der Fundamentallinse sind aber entgegengesetzt gerichtet. Das Interstitium wird ebenfalls vergrössert und es ist $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$; dasselbe ist aber nur halb so gross wie bei dem systematischen Auge und der gleichseitigen geschichteten Linse nach der Integrationsformel.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zur Bestimmung der Integrale von α und β schreiten. Wir wollen auch hier beide in Fig. 62 und Fig. 63 verzeichneten Fälle betrachten und zwar den letzten zuerst, weil er analytisch einfacher ist.

Der zweiten Näherungsberechnung zufolge ist die Lage der Hauptpuncte der Fundamentallinse und irgend eines Kernlinsenelements in Fig. 64 veranschaulicht.

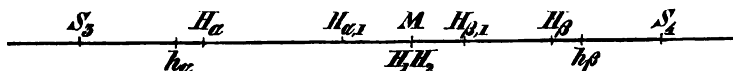


Fig. 64.

Wir recapituliren folgende Bezeichnungen: $MH_{\alpha,1} = u_1$, $MH_{\beta,1} = u_2$, $H_{\alpha,1} H_\alpha = \alpha$, $H_{\beta,1} H_\beta = \beta$. Ferner seien S_3 und S_4 die Scheitel eines beliebigen Kernlinsenelements, $MS_3 = y$, die vordere Halbaxe bis M gleich b_1 und die hintere gleich b_2. MS_4 hat alsdann

den Werth $\frac{b_2}{b_1} y$. H_α und H_β sind die variabeln Hauptpuncte des Systems.

Wenn durch das Hinzutreten eines Elements der Kernlinse H_α in h_α, H_β in h_β übergehen, so ist

$$H_\alpha h_\alpha = \partial\alpha, \quad H_\beta h_\beta = \partial\beta, \quad H_\alpha H_2 = D_1, \quad H_\beta H_1 = D_2.$$

Es ist nun nach den früheren Deductionen

$$\partial\alpha = -D_1\varphi\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right), \quad \partial\beta = -D_2\varphi\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right),$$

und

$$-D_1 = u_1 + \alpha, \quad -D_2 = u_2 + \beta.$$

Gemäss (144) erhalten wir die beiden Integrale

$$(u_1 + \alpha)\,\varphi = u_1\varphi', \quad (u_2 + \beta)\,\varphi = u_2\varphi'.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{u_1 + \alpha}{u_2 + \beta} = \frac{u_1}{u_2}$$

oder einfacher

$$\alpha : \beta = u_1 : u_2. \tag{150}$$

Setzen wir in die ebenfalls gültigen Gleichungen

$$\alpha = u_1 \frac{\varphi'}{\varphi''}, \quad \beta = u_2 \frac{\varphi'}{\varphi''} \tag{151}$$

für φ' und φ'' die Zahlenwerthe derselben resp. 130,2 und 66,35 ein, so wie $u_1 = 0{,}050$, $u_2 = 0{,}030$, dann erhalten wir $\alpha = 0{,}100$, $\beta = 0{,}060$. Dies gibt schliesslich

$$MH_\alpha = u_1 + \alpha = 0{,}150, \quad MH_\beta = u_2 + \beta = 0{,}090,$$
$$\varepsilon = H_\alpha H_\beta = 0{,}240.$$

Das Interstitium der systematischen Augenlinse von Listing ist gleich 0,246, das von Helmholtz 0,228. Die Lage der Hauptpuncte einer solchen Linse liegen aber entschieden an falschen Stellen; sie liegen in der geschichteten Linse weiter nach vorne. Wir werden versuchen für die Abstände derselben vom Mittelpuncte M (Fig. 62) einen brauchbaren analytischen Ausdruck abzuleiten.

Der ersten Näherungsrechnung zufolge ist die Lage der Hauptpuncte der Fundamentallinse irgend eines Kernelements und der Combination beider in folgender Figur zusammengestellt.

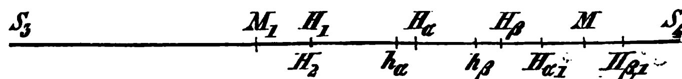


Fig. 65.

Wir benutzen dieselben Bezeichnungen wie zuvor. Im Beginn der Integration fallen H_α und H_β mit $H_{\alpha,1}$ und $H_{\beta,1}$ zusammen; α und β sind also in diesem Momente noch gleich Null. M_1M ist

gleich $m b_1$ und ferner seien $M_1 H_{\alpha,1} = u_1$, $M_1 H_{\beta,1} = u_2$, $M H_{\alpha,1} = v_1$, $M H_{\beta,1} = v_2$; endlich ist im Laufe der Integration $H_{\beta,1} H_\beta = \beta$, $H_{\alpha,1} H_\alpha = \alpha$, $H_\beta h_\beta = \partial \beta$ und $H_\alpha h_\alpha = \partial \alpha$.

Es seien nun $S_3 S_4$ die Scheitelpuncte der Flächen irgend eines Kernlinsenelements und $H_1 H_2$ seine coincidirenden Hauptpuncte, $M_1 S_3 = y$ und $M_1 S_4 = y_1$, so ist zunächst $M_1 H_1$ zu berechnen, welchen Abschnitt wir mit my bezeichnen. Der Coefficient m ergibt sich auf folgende Art:

$$S_3 H_1 = r_1 \frac{y + y_1}{r_1 + r_2}, \quad M_1 H_1 = S_3 H_1 - y = \frac{r_1 y_1 - r_2 y}{r_1 + r_2}.$$

Es ist nun $y_1 : b_2 = y : b$ und indem wir y_1 eliminiren, erhalten wir

$$M_1 H_1 = \frac{r_1 b_2 - r_2 b_1}{b_1 (r_1 + r_2)} y = my.$$

Wenn $y = b_1$ ist, dann ist $M_1 H_1 = M_1 M = m b_1$.

Wir haben hernach das Integral zwischen den Grenzen b_1 und Null auszuführen. Für die gleichseitige oder accommodirte Linse liegt M_1 in der Mitte der Axe und m ist gleich Null. Wir gehen nun aus von den allgemeinen Formeln

$$\alpha_1 = \frac{-f_1 D}{f_2 - \varphi_1 + D}, \quad \alpha_2 = \frac{-\varphi_2 D}{f_2 - \varphi_1 + D}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha_1 = h_\alpha H_\alpha = \partial \alpha \text{ (positiv)},$$
$$\alpha_2 = h_\beta H_2 = D + \partial \beta \text{ (negativ)},$$
$$-D = (u_2 - \beta - my) \text{ (positiv)},$$

und weiter die Differenzialgleichungen

$$\partial \alpha = - D \varphi \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right), \tag{152}$$

$$\alpha_2 = \frac{D}{1 + (\varphi - D) \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right)} = D \left[1 - (\varphi - D) \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right)\right]$$

oder

$$\partial \beta = - D (\varphi - D) \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right). \tag{153}$$

Da $H_\alpha H_\beta = \varepsilon$ ist, so hat man endlich noch

$$\partial \varepsilon = \partial \beta - \partial \alpha = D^2 \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right). \tag{154}$$

Durch Integration dieser drei Differenzialgleichungen erhalten wir α, β und ε, von denen α und β die Anfangswerthe Null und ε den Anfangswerth $\varepsilon_0 = H_{\alpha,1} H_{\beta,1}$ haben.

Setzen wir den Werth von D ein, so erhalten wir

$$\partial \alpha = (u_2 - \beta - my) \varphi \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right),$$

$$\partial\beta = (u_2 - \beta - my)\,\varphi\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) + (u_2 - \beta - my)^2\,\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right),$$

$$\partial\varepsilon = (u_2 - \beta - my)^2\,\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right)..$$

Für das accommodationslose Auge ist

$$u_1 = M_1 H_{\alpha,1} = 0{,}601, \quad u_2 = M_1 H_{\beta,1} = 0{,}681,$$

also $\varepsilon_0 = 0{,}0785$. Der Abstand $MH_{\alpha,1}$ ist mit v_1, der Abstand $MH_{\beta,1}$ mit v_2 bezeichnet worden.

Da der Werth von φ zwischen den Gränzen ∞ und $\varphi'' = 66{,}35$ variirt, so folgt hieraus, dass D gegen φ immer sehr klein bleibt, also auch $\partial\varepsilon$ gegen $\partial\alpha$ und $\partial\beta$.

Um die Gleichung in β also in erster Näherung integriren zu können, ist es gestattet zu setzen:

$$\partial\beta = (u_2 - \beta - my)\,\varphi\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right).$$

Man kann daraus in zweiter Näherung das Integral der vollständigen Gleichung ableiten.

Wir führen statt φ die Variable y ein. Es ist nämlich

$$\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]\frac{\partial\left(\frac{y}{b_1}\right)}{N_m - \alpha\left(\frac{y}{b_1}\right)^2},$$

wofür wir nach dem Früheren setzen können

$$\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -\,2z\,\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\,\partial\left(\frac{y}{b_1}\right).$$

Ferner ist, soweit es die Kernlinse betrifft,

$$\frac{1}{\varphi} = \int_y^{b_1} 2z\,\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\,\partial\left(\frac{y}{b_1}\right) = 2z\,\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\left(\frac{b_1 - y}{b_1}\right).$$

Hieraus folgt

$$\varphi\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -\,\frac{\partial y}{b_1 - y}.$$

Die Differenzialgleichung geht dadurch über in die folgende

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{1}{b_1 - y}\,\beta + \frac{u_2 - my}{b_1 - y} = 0. \qquad (155)$$

Wir müssen zunächst die Variabeln von einander trennen. Dies gelingt durch die Substitution $\beta = uv$, wo u und v zwei noch zu bestimmende Functionen von y sind. Es ist alsdann

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = u\,\frac{\partial v}{\partial y} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Die Differenzialgleichung geht dadurch über in

$$u\,\frac{\partial v}{\partial y} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{uv}{b_1 - y} + \frac{u_2 - my}{b_1 - y} = 0.$$

Man kann nun v so bestimmen, dass der Coefficient von u gleich Null wird, also

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{b_1 - y} = 0.$$

Alsdann wird auch noch

$$\frac{v \, \partial u}{\partial y} + \frac{u_2 - m y}{b_1 - y} = 0.$$

Die erste Gleichung lässt sich integriren, indem man sie schreibt

$$\frac{\partial v}{v} - \frac{\partial y}{b_1 - y} = 0.$$

Das Integral ist

$$\log \text{nat}\, v + \log \text{nat}\, (b_1 - y) = C,$$

oder

$$v = C' : (b_1 - y).$$

Setzt man diesen Werth in die zweite Differenzialgleichung ein, so erhält man

$$\frac{C' \partial u}{\partial y} + (u_2 - m y) = 0,$$

oder

$$\partial u = - \frac{u_2 - m y}{C'} \partial y.$$

Das Integral ist

$$u = \frac{(u_2 - m y)^2}{2 m C'} + C''.$$

Man erhält folglich

$$\beta = u v = \frac{(u_2 - m y)^2}{2 m (b_1 - y)} + \frac{C'''}{b_1 - y},$$

oder

$$\beta (b_1 - y) = \frac{(u_2 - m y)^2}{2 m} + C'''.$$

Hierin ist die Constante C''' noch zu bestimmen. Es muss nämlich $\beta = 0$ werden für $y = b_1$. Dieser Bedingung genügt die Gleichung

$$\beta + v_2 = \frac{(u_2 - m y)^2}{2 m (b_1 - y)} - \frac{(u_2 - m b_1)^2}{2 m (b_1 - y)},$$

oder

$$\beta = (u_2 - v_2 - m b_1) + \tfrac{1}{2} m (b_1 - y).$$

Das erste Glied zur Rechten ist gleich Null, also ist

$$\beta = \tfrac{1}{2} m (b_1 - y). \qquad (156)$$

Um die Integrale der Differenzialgleichungen in zweiter Näherung zu erhalten, setzen wir den Werth von β ein; das gibt

$$\partial \alpha = \tfrac{1}{2} m \, (b_1 - y) \, \varphi \, \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right),$$

$$\partial \beta = \tfrac{1}{2} m \, (b_1 - y) \, \varphi \, \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right) + \tfrac{1}{4} m^2 (b_1 - y)^2 \, \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right),$$

$$\partial \varepsilon = \tfrac{1}{4} m^2 (b_1 - y)^2 \, \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right).$$

Wir haben das allgemeine Integral der Kernlinse mit φ, das ganze mit φ'' bezeichnet und ferner ist

$$b_1 - y = \frac{b_1 r_1 r_2}{2z(r_1 + r_2)} : \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi''}{\varphi} b_1 .$$

Setzen wir dies ein und integriren zwischen den Gränzen $\varphi = \infty$ und φ'', so erhalten wir

$$\alpha = \tfrac{1}{2} m\, b_1 \cdot \varphi'' \int_{\infty}^{\varphi''} \partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \tfrac{1}{2} \mathfrak{m} b_1 = \tfrac{1}{2} M_1 M = \tfrac{1}{2}(u_2 - v_2), \quad (157)$$

$$\beta = \tfrac{1}{2} m b_1 + \tfrac{1}{4} m^2 b_1{}^2 \varphi'' \int_{\infty}^{\varphi''} \frac{1}{\varphi^2} \partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \tfrac{1}{2} m b_1 \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{m b_1}{\varphi''}\right), \quad (158)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{12} m^2 \frac{b_1^2}{\varphi''^2} + \varepsilon_0 . \quad (159)$$

Wir fanden nun

$$u_2 = 0{,}681, \quad m = 0{,}650, \quad \varphi'' = 66{,}35, \quad b_1 = 1{,}6.$$

Demnach ist

$$\alpha = 0{,}5200, \quad \beta = 0{,}5214, \quad \varepsilon_1 = 0{,}0799 .$$

Wir erhalten also für die geschichtete Linse

$$S_1 H_\alpha = 1{,}681, \quad S_2 H_\beta = 1{,}840, \quad \varepsilon_1 = 0{,}080.$$

Ist C das Centrum der Linse, so ist $S_1 C = 1{,}8$. Die beiden Hauptpuncte liegen also kurz vor dem Centrum und hiernach würden die Cardinalpuncte des systematischen Auges von Listing und Helmholtz zu modificiren sein. Sehen wir, wohin hiernach die Knotenpuncte des menschlichen Auges zu verlegen sein werden.

Zunächst ist für den Abstand des ersten Hauptpunctes der Linse von dem zweiten Hauptpuncte der Hornhaut zu nehmen

$$D_1 = H_{\beta,1} H_{\alpha,2} = 3{,}6 + 1{,}681 = 5{,}281,$$

und wenn wir die Brennweiten nach Helmholtz's systematischem Auge zu Grunde legen:

$$f_1 = -23{,}6923, \quad \varphi_1 = 31{,}6923.$$
$$f_2 = -43{,}707, \quad \varphi_2 = 43{,}707.$$

Gemäss den Formeln (35) bis (39) erhalten wir nun

$$f = -14{,}768, \quad \varphi = 19{,}755,$$
$$\alpha_1 = -1{,}7844, \quad \alpha_2 = 3{,}2918, \quad \varepsilon = 0{,}2838.$$

Darnach ist der Ort des ersten Hauptpunctes 1,7844, der Ort des zweiten Hauptpunctes 2,0682. Die Hauptpuncte des Auges liegen also bezw. 0,16 und 0,29 Millimeter weiter nach vorne, als sie in dem systematischen Auge liegen. Ebenso natürlicherweise auch die Knotenpuncte. Man findet die Oerter derselben, indem wir die Differenz der Brennweiten, also 4,987 zu denen der Hauptpuncte addiren. Daraus folgt der Ort des ersten Knotenpunctes K_α ist gleich 6,771, der des zweiten Knotenpunctes K_β gleich 7,055. Der Abstand

des ersten Knotenpunctes von der vordern Linsenfläche ist demnach gleich $3{,}171^{mm}$, der des zweiten von der hinteren Linsenfläche gleich 0,145. Die von Helmholtz berechneten Knotenpuncte liegen ungefähr in der Mitte zwischen dem theoretischen Knotenpuncte und dem von Listing berechneten.

Berechnung der Cardinalpuncte und des totalen Brechungsvermögens der für die Nähe und Ferne accommodirten geschichteten Linse des Ochsenauges. Um einen Vergleich der an diesem Auge gemessenen innern Augenaxe mit der aus den einzelnen Dimensionen und optischen Constanten berechneten Brennweite zu gewinnen, wollen wir noch diese Rechnungen nach den in den vorhergehenden Abschnitten abgeleiteten Formeln ausführen. Wir zerlegen das Auge wieder in zwei Systeme: die Hornhaut mit der wässrigen Feuchtigkeit hinter derselben und die geschichtete Linse zwischen der wässrigen und gläsernen Feuchtigkeit. § 56.

Erstes System: Die erforderlichen Daten entnehmen wir aus der Tabelle der optischen Constanten für das Ochsenauge (§ 52). Es ist darnach

$$n_1 = \frac{103}{77}, \quad r_1 = 18{,}0^{mm}.$$

Hieraus findet man

$$f_1 = -\frac{r_1}{n_1 - 1} = -53{,}3; \quad \varphi_1 = \frac{n_1 r_1}{n_1 - 1} = 71{,}3.$$

Zweites System: Wir nehmen an, dass bei der stärksten Accommodation die Krümmungsradien der Linsenflächen beide gleich 10^{mm} werden und die Dicke gleich 12^{mm} bleibe. Wir fanden in § 54

$$-f_2 = \varphi_2 = 32{,}0.$$

Hiernach ist das totale Brechungsvermögen oder der imaginäre Brechungsindex der Krystalllinse des Ochsenauges gleich 1,5452. Senff fand durch directe Messungen den kleineren Werth 1,539.

Die Augen, welche von mir untersucht worden, hatten mit Ausnahme *eines* einen ziemlich hornartigen Kern und ergaben für den Kern den Brechungsindex 1,4714. Die andere Linse mit weicherem Kerne ergab den Werth 1,4550. Dieser stimmt mit dem von Senff beobachteten Werthe 1,453 ziemlich nahe überein. Zu dem Werthe 1,4550 gehört nun der theoretische Totalindex 1,5390, welcher mit dem von Senff beobachteten Werth genau übereinstimmt. Um die Cardinalpuncte des ganzen Auges zu erhalten, würden wir zunächst die der geschichteten Linse zu berechnen haben. Wir bedienen uns dazu der Formeln (144) und (148)

$$u + \alpha = u \frac{\varphi'}{\varphi},$$

$$\alpha \varphi'' = \frac{d}{8}(2r_1 - d).$$

Aus der zweiten berechnen wir α, indem wir die Zahlenwerthe $\varphi'' = 39{,}4$, $d = 12$, $r_1 = 10$ einsetzen. Dieses ergibt $\alpha = 0{,}3045$ und $u = 0{,}0761$. Demnach ist $MH_\alpha = -0{,}3806$, $MH_\beta = +0{,}3806$ und $\varepsilon = 0{,}7612$.

Für die menschliche Linse war genau

$$\frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi''} : \frac{1}{\varphi'} = 3:2:1.$$

Für die Linse des Ochsenauges ist

$$\frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi''} : \frac{1}{\varphi'} = 5:4:1.$$

Ist D_1 der Abstand des ersten Hauptpuncts der Linse von der vordern Hornhautfläche, so ist $D_1 = 10{,}6194$. Ferner ergibt sich

$$f = -18{,}5, \quad \varphi = 24{,}7, \quad \alpha_1 = -6{,}1, \quad \alpha_2 = +3{,}7; \quad \varepsilon = 1{,}58.$$

Der Ort des ersten Hauptpunctes ist 6,10, der des zweiten 7,68. Der Ort des zweiten Hauptbrennpunctes ist 32,38. Nach meinen Messungen ist der Ort der Retina ungefähr 34,0.

Wir berechnen nun auch die Cardinalpuncte für das accommodationslose Ochsenauge. Für das erste System sind die dioptrischen Constanten unveränderlich. Zur Berechnung der zweiten, der geschichteten Krystalllinse, nehmen wir die in § 55 berechneten Integrale zu Hülfe.

Zur Berechnung der Brennweite der Linse bedienen wir uns der Formel

$$\frac{1}{\varphi_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}(2z + n_2 - 1).$$

Setzen wir die Zahlenwerthe $r_1 = 10{,}25$, $r_2 = 13{,}75$, $z = 0{,}0636$, $n_2 = \frac{1{,}3784}{1{,}3365} = 1{,}0313$ ein, so resultirt

$$\frac{1}{\varphi_2} = 0{,}0270 = \frac{1}{37{,}0}.$$

Man findet überdies

$$\varphi'' = 45{,}90, \quad \varphi' = 188{,}0.$$

Für die menschliche Linse des accommodationslosen Auges ist ebenfalls nahezu

$$\frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi''} : \frac{1}{\varphi'} = 3:2:1,$$

für die Linse des accommodationslosen Ochsenauges fast genau

$$\frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi''} : \frac{1}{\varphi'} = 5:4:1.$$

Es sind jetzt noch die Hauptpuncte der Linse zu berechnen. Die Lage der Hauptpuncte $H_{\alpha,1}$ und $H_{\beta,1}$ der Fundamentallinse sind bestimmt durch die Gleichungen

$$M_1 H_{\alpha,1} = u_1 = -\alpha_{1,1} - b_1, \quad M_1 H_{\beta,1} = u_2 = -\alpha_{2,1} + b_2,$$

wo M_1 den Kernmittelpunct oder den Durchschnittspunct des Durchmessers mit der Axe bezeichnet. Es ist nun

$$-\alpha_{2,1} = -4{,}92, \; -\alpha_{1,1} = +6{,}89, \; b_1 = 5{,}0, \; b_2 = 7{,}0, \; \varepsilon = 0{,}19.$$

Folglich ist

$$u_1 = 1{,}89, \quad u_2 = 2{,}08.$$

Die Gleichung (158), nämlich

$$\beta_0 = \frac{m}{2} b_1 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{m b_1}{\varphi''}\right)$$

erfordert nun die Berechnung von m nach der Formel

$$m = \frac{r_1 b_2 - r_2 b_1}{b_1 (r_1 + r_2)}.$$

Setzen wir dies in die Formel ein, so wird

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \frac{r_1 b_2 - r_2 b_1}{r_1 + r_2}.$$

Man findet $\beta_0 = 1{,}08$.

Der Abstand des zweiten Hauptpunctes von der Vorderfläche ist demnach

$$S_1 H_\beta = S_1 H_{\beta,1} - \beta_0 = 7{,}08 - 1{,}08 = 6{,}00.$$

Derselbe liegt also im Centrum der Linse. Wir haben noch das Interstitium ε_0 zu berechnen nach Formel (158):

$$\varepsilon_0 = \frac{m^2 z (r_1 + r_2)}{b r_1 r_2} b_1 + \varepsilon_1,$$

wofür wir auch setzen können

$$\varepsilon_0 = \frac{z}{6} \cdot \frac{(r_1 b_2 - r_2 b_1)^2}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} + \varepsilon_1.$$

Setzen wir die Zahlenwerthe ein, so wird

$$\varepsilon_0 = 0{,}00727 + 0{,}19 = 0{,}20.$$

Demnach ist nun

$$S_1 H_\alpha = S_1 H_\beta - \varepsilon_0 = 5{,}80.$$

Die beiden Hauptpuncte fallen also mehr mit dem Centrum zusammen.

Wir sind jetzt im Stande, die Cardinalpuncte des ganzen Auges zu bestimmen. Wir haben dabei zu setzen

$$D_1 = 5 + 5{,}8 = 10{,}8.$$

Die Berechnung ergibt schliesslich

$$f = -20{,}3, \quad \varphi = 27{,}1.$$
$$\alpha_1 = -5{,}3, \quad \alpha_2 = 3{,}7.$$

Demgemäss ist der Ort des ersten Hauptpunctes 5,3, der Ort des zweiten Hauptpunctes 7,3 und der Ort des zweiten Hauptbrennpunctes 34,3, also genau an derselben Stelle, wo sich die Netzhaut

befindet. Berechnet man aus der Brennweite 37,0^{mm} der accommodationslosen Linse das totale Brechungsvermögen derselben, so findet man $N = 1{,}3365 \cdot 1{,}1576 = 1{,}5466$, also nahezu denselben Werth, wie bei der accommodirten Linse.

§ 57. **Von der Berechnung des Brechungsindex des Kerncentrums und der Berechnung des totalen Brechungsvermögens der Krystalllinse aus den Dimensionen des Auges. — Gleichungen der Brechungsindices der Linsenschichten.** Durch die vorangehenden mathematischen Deductionen werden wir zu einem für die Dioptrik des Menschen- und Thierauges höchst beachtenswerthen Theoreme geführt. Wenn nämlich, wie es bei der geschichteten accommodationslosen oder accommodirten Linse des Menschen- und Ochsenauges fast genau der Fall ist, die Haupt- und Knotenpuncte in das Centrum der Linse fallen, so wird man im Stande sein, aus den Dimensionen des Auges und aus einigen bei allen Augen constanten Indices, den absoluten Brechungsindex der innersten Kernsubstanz direct zu berechnen. Die Dimensionen, welche hiezu zu wissen nöthig sind, kann man sich mit einem genügenden Grade von Genauigkeit leicht verschaffen, indem man die noch frischen Augen je nach ihrer Grösse ein bis zwei Stunden lang in einer Kältemischung gefrieren lässt. Sie lassen sich dann mit einem scharfen, breiten Messer spalten und bequem handhaben. Die Krümmungen der Linsenflächen und der Hornhaut erhält man genauer in ungefrorenem Zustande, indem man sie einer Reihe dicht nebeneinander liegender concentrischer Kreise anzuschmiegen sucht. Es genügt zu unserm Zwecke schon eine Genauigkeit von $1 \pm \frac{1}{32}$ der wahren Grösse.

Bezeichnen wir den Ort des Centrums der Linse, d. h. also den Abstand des Centrums (Axenmittelpunctes) von dem vordern Scheitel der Hornhaut mit h, die Länge der inneren Augenaxe, d. h. den Ort der Retina mit a, die zweite Brennweite der Hornhaut mit φ_1, die der Linse im Glaskörper mit φ_2 und die zweite Hauptbrennweite des Auges mit φ, so ist

$$\varphi - \alpha_2 = a - h,$$

oder

$$\frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - h} - \frac{\varphi_2 h}{\varphi_1 + \varphi_2 - h} = a - h.$$

Lösen wir die Gleichung nach φ_2 auf, so erhalten wir die Brennweite der Linse ausgedrückt durch

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 - h}{\varphi_1 - a}(a - h). \qquad (160)$$

Nun ist nach dem Früheren für die geschichtete Krystalllinse

$$\frac{1}{\varphi_2} = [2z + (n_2 - 1)]\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\varphi_1 - a}{(\varphi_1 - h)(a - h)},$$

oder $$2\frac{N_m - N_1}{N_m} + \frac{N_1 - N_0}{N_0} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{\varphi_1 - a}{(\varphi_1 - h)(a - h)} = T,$$

oder endlich $$N_m = \frac{2 N_0 N_1}{N_0 + N_1 - T N_0}. \quad (161)$$

In dieser Formel bezeichnet wie früher N_0 den absoluten Brechungsindex des Kammerwassers, N_1 den der Linsenkapsel, und N_m den Index der innersten Kernsubstanz. Die Messungen ergeben

$$N_0 = 1{,}3352 \text{ bis } 1{,}3365, \quad N_1 = 1{,}3750 \text{ bis } 1{,}3784.$$

Es ist also allgemein

$$N_m = \frac{2 \cdot 1{,}3365 \cdot 1{,}3784}{2{,}7149 - 1{,}3365\, T} = \frac{2 \cdot 1{,}3784}{2{,}0314 - T}.$$

Wir wollen zunächst diese Formel an einer Reihe von Messungen prüfen, welche von mir an den Augen verschiedener Säugethiere, Vögel und Fische ausgeführt worden sind.

Bei sämmtlichen von mir ausgeführten neuen Messungen der Brechungsindices der verschiedenen Augenmedien wurde nur das *grosse Refractometer* von Abbe angewendet. Was das Princip desselben anbelangt, so ist bereits in § 3 darauf hingedeutet worden, dass es auf dem Gesetze von der totalen Reflexion der Lichtstrahlen an der Grenzfläche eines optisch dichteren Mediums beruht. Ich will hier deshalb noch eine kurze Beschreibung des Apparates folgen lassen, weil man künftig für den indicirten Zweck allein zu diesem ausgezeichneten Mittel wird greifen müssen.

Das *Abbe'sche Refractometer*, vom Mechaniker Zeiss in Jena gefertigt, hat zwei wesentliche Vorzüge vor andern Vorrichtungen dieser Art; erstens nämlich den, dass ein Tropfen der zu untersuchenden weichen oder flüssigen Substanz hinreicht und zweitens, dass es eine Messung gestattet, deren Resultat eine Zuverlässigkeit von vier Decimalen besitzt. Das Princip von der totalen Reflexion der Lichtstrahlen beim Auftreffen eines Lichtstrahles, welcher in irgend einem Medium verläuft, auf die Trennungsfläche von einer optisch dünnern Substanz wird folgendermassen dabei angewandt.

Der Reflexionsapparat, welcher vor dem Objecte eines Fernrohres angebracht ist, besteht aus zwei rechtwinkligen Flintglasprismen von gleichen brechenden Winkeln, so dass sie mit den Hypotenusenflächen gegeneinander gelegt eine dicke planparallele Platte bilden. Sind jene beiden Flächen trocken, so befindet sich zwischen ihnen eine dünne Luftschicht. Betrachtet man durch ein paar parallele Flächen des Doppelprismas einen Lichtpunct, so verschwindet derselbe bei einer bestimmten Stellung der Trennungsfläche gegen die Richtung der durchgehenden Lichtstrahlen hinter einem undurchsichtigen schwarzen von einem rothen Farbenrande begrenzten Felde, der sogenannten *Auslöschungsgrenze*. Diese Auslöschungsgrenze verändert

bei derselben Stellung des Doppelprismas gegen die Gesichtslinie ihre Lage bei Einschaltung irgend einer Flüssigkeit zwischen die Hypotenusenflächen. Befestigt man das Prisma vor das Objectiv eines Fernrohres, so ist die Lage der Gesichtslinie fixirt durch die Axe des Fernrohres. Der gesuchte Brechungsindex der Flüssigkeit ist nun eine sehr einfache Function von dem Index ν des Glases der Prismen, dem Winkel ω der Prismenflächen und dem Winkel α, welcher die Fernrohraxe mit der Normalen der Hinterfläche des Doppelprismas bildet.

Ist nämlich β der Brechungswinkel des in die Vorderfläche des Doppelprismas einfallenden Strahles, welcher bekanntlich dem austretenden oder der Fernrohraxe parallel ist, so ist

$$\sin \alpha = \nu \sin \beta.$$

Ist γ der Grenzwinkel der Totalreflexion, so ist

$$\gamma = \beta + \omega$$

und der gesuchte Brechungsindex der Flüssigkeit für die Farbe mittlerer Brechbarkeit oder für homogenes Licht

$$n = \nu \sin \gamma.$$

Da dies eine trigonometrische Function des Drehungswinkels α ist, so ist die Theilung auf der Alhidade nothwendig eine ungleichmässige, wenn sie direct die Werthe von n angeben soll. Die Theilung lässt sich aber aus den Constanten des Instrumentes leicht berechnen. Sie bezieht sich natürlich auf eine bestimmte Farbe und bei dem von mir gebrauchten Instrumente auf die Fraunhofersche Linie D. Nun ist aber der Grenzwinkel für jede Farbe des Spectrums ein anderer und zwar für roth am grössten, weshalb der Rand der Auslöschungsgrenze mit einem rothen Saume gefärbt erscheint. Um die Dispersion des Lichtes aufzuheben und der Auslöschungsgrenze die nöthige Schärfe zu geben, ist hinter dem Objectiv des Fernrohrs ein Amici'scher Compensator angebracht, d. i. ein System aus Crown- und Flintglasprismen, welches für die Farbe D geradsichtig ist. Bei der Drehung desselben um seine Axe werden der rothe und violette Theil des Spectrums gegen die Farbe D verschoben und in ihr zum Verschwinden gebracht. Diese Drehung wird eine um so grössere sein müssen, je grösser die Totaldispersion der Substanz ist und es kann deshalb die Beobachtung der Drehung des Amici'schen Prismas dazu dienen, angenähert die Totaldispersion zu berechnen. Zu diesem Zwecke ist dem Instrumente eine Tabelle beigegeben. Es muss aber bemerkt werden, dass das Instrument bei seiner jetzt bestehenden Einrichtung für die Bestimmung der Totaldispersion noch keine befriedigenden Resultate ergibt, da die Unterschiede sehr wenig bemerklich sind. Statt eines Amici'schen Prismas sind zur möglichst

vollkommenen Aufhebung der Dispersion zwei gleiche durch ein gemeinsames Getriebe mit einander verbunden, wodurch sie eine gleich grosse Gegenbewegung erhalten.

Im Uebrigen verweisen wir auf die kleine Schrift: Abbe, Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens fester und flüssiger Körper. Jena 1874.

Wir gehen zu den Resultaten der Messungen selbst über und setzen bei allen daran geknüpften theoretischen Betrachtungen voraus, dass die Krystalllinse des todten Auges für die Ferne accommodirt sei.

1. *Das menschliche Auge.* (Schematisches Auge nach Helmholtz.) Die Dimensionen sind folgende:

Krümmungsradius der Hornhaut	8,0^{mm}
- der vorderen Linsenfläche	10,0
- der hinteren Linsenfläche	6,0
Axe der Krystalllinse	3,6
Durchmesser der Krystalllinse	9,0
Ort der vorderen Linsenfläche	3,6
- des Axenmittelpunctes (Centrum) . . .	5,4
- der hinteren Linsenfläche	7,2
- der Retina (innere Augenaxe)	22,2
Brechungsindex der Kernsubstanz	1,4157
Zweite Brennweite der Hornhaut	31,7.

Hiernach ist $r_1 = 10{,}0^{mm}$, $r_2 = 6{,}0$, $\varphi_1 = 31{,}7$, $h = 5{,}4$ und $a = 22{,}2$. Daraus ergibt sich durch Rechnung

$$T = 0{,}0833\,, \quad N_m = 1{,}4151\,.$$

Die Messungen ergaben also nahezu denselben Werth von N_m, nämlich 1,4157.

2. *Das Ochsenauge.* Nach den in § 52 mitgetheilten Messungen sind die Dimensionen folgende:

Krümmungsradius der Hornhaut	18,0^{mm}
- der vorderen Linsenfläche	13,75
- der hinteren Linsenfläche	10,25
Axe der Krystalllinse	12,0
Durchmesser der Krystalllinse	17,75
Ort der vorderen Linsenfläche	5,0
- des Axenmittelpunctes	11,0
- der hinteren Linsenfläche	17,0
- der Retina (innere Augenaxe) . . .	34,0
Brechungsindex der Kernsubstanz . . .	1,4714
Mittlerer Index der Krystalllinse	1,4139
Zweite Brennweite der Hornhaut	71,3.

Hiernach ist nun $r_1 = 13{,}75^{mm}$, $r_2 = 10{,}25$, $\varphi_1 = 71{,}3$, $h = 11{,}0$

und $a = 34{,}0$. Durch Rechnung mittels der aufgestellten Formel ergibt sich

$$T = 0{,}1578, \quad N_m = 1{,}4713.$$

Die Messungen ergaben für N_m im Durchschnitt denselben Werth, nämlich 1,4714.

3. *Das Auge eines einjährigen Schweines.* Die Dimensionen und optischen Constanten desselben waren folgende:

Krümmungsradius der Hornhaut	9,5^{mm}
- der vorderen Linsenfläche	7,25
- der hinteren -	5,5
Axe der Krystalllinse	7,5
Durchmesser der Krystalllinse	11,0
Ort der vorderen Linsenfläche	3,5
- des Axenmittelpunctes	7,25
- der hinteren Linsenfläche	11,0
- der Retina	22,5
Brechungsindex der Kernsubstanz	1,4293
Zweite Brennweite der Hornhaut	37,8

Hiernach ist $r_1 = 7{,}25$, $r_2 = 5{,}5$, $\varphi_1 = 37{,}8$, $h = 7{,}25$ und $a = 22{,}5$. Durch Rechnung mittels der Formel findet man

$$T = 0{,}1027, \quad N_m = 1{,}4313.$$

Die Messungen ergaben für N^m nahezu denselben Werth von N_m, nämlich 1,4293.

4. *Das Auge des Kaninchen.* An dem Auge eines ausgewachsenen Thieres wurden folgende Constanten gemessen:

Krümmungsradius der Hornhaut	8,5^{mm}
- der vorderen Linsenfläche	7,25
- der hinteren -	6,5
Axe der Krystalllinse	7,0
Durchmesser derselben	10,5
Ort der vorderen Linsenfläche	2,5
- des Axenmittelpunctes	6,0
- der hinteren Linsenfläche	9,5
- der Retina	17,0
Brechungsindex der Kernsubstanz	1,4796
- des destillirten Wassers . .	1,3325.

Hiernach ist $r_1 = 7{,}25$, $r_2 = 6{,}5$, $\varphi_1 = 33{,}75$, $h = 6{,}0$ und $a = 17{,}0$. Durch Rechnung erhält man aus der gegebenen Formel

$$T = 0{,}1880, \quad N_m = 1{,}4954.$$

Die Messungen des Kernindex ergaben im Durchschnitt den etwas kleineren Werth 1,4796.

5. *Das Auge der Hauskatze.* Die Messungen ergaben für dieses Auge folgende Werthe:

Krümmungsradius der Hornhaut	7,25^{mm}
Höhe der Hornhaut	4,5
Basis derselben	13,0
Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche	6,0
- - hinteren -	6,0
Axe der Krystalllinse	7,5
Durchmesser derselben	9,0
Ort der vorderen Linsenfläche	3,0
- des Axenmittelpunctes	6,0
- der hinteren Linsenfläche	9,0
- der Retina	17,0
Brechungsindex des Kerncentrums	1,4402

Hiernach ist $r_1 = r_2 = 6,0$, $\varphi_1 = 28,78$, $h = 6,0$ und $a = 17,0$. Durch Rechnung findet man

$$T = 0,1410, \quad N_m = 1,4577.$$

Die Messungen ergaben den etwas kleineren Werth 1,4402.

6. *Das Auge des Pferdes.* An dem Auge eines zehnjährigen Pferdes wurden folgende Constanten gemessen:

Krümmungsradius der Hornhaut	19,75^{mm}
- - vorderen Linsenfläche	21,0
- - hinteren -	13,0
Axe der Krystalllinse	13,0
Durchmesser derselben	22,0
Axe der festeren Substanz	10,0
Durchmesser derselben	13,0
Ort der vorderen Linsenfläche	5,5
- des Axenmittelpunctes	18,0
- der hinteren Linsenfläche	15,5
- der Retina	44,75
Brechungsindex der Linsenkapsel	1,3784
- - Corticalschicht ($y : b = 0,95$)	1,3870
- - - ($y : b = 0,75$)	1,4070
- - äusseren festen Schicht ($y : b = 0,6$) .	1,4231
- - mittleren - - ($y : b = 0,5$) .	1,4298
- - Kernhülle ($y : b = 0,35$)	1,4392
- des Kerncentrums ($y : b = 0,0$)	1,4458

Hiernach ist $r_1 = 21,0$, $r_2 = 13,0$, $\varphi_1 = 78,4$, $h = 12,0$ und $a = 44,75$. Durch Rechnung erhält man aus der gegebenen Formel

$$T = 0,1242, \quad N_m = 1,4457.$$

Die Messungen ergaben fast genau denselben Werth, nämlich 1,4458.

7. *Das Auge einer Eule (strix aluco), des Thurmfalken (falco tinnunculus) und des Raben (corvus corax).* Da bei den Vögeln die Linsensubstanz sehr weich ist, so ergeben die Messungen keine besonders zuverlässigen Werthe für die Krümmungen der Linse, so wie für den Ort ihres Centrums, wovon das Meiste abhängt. Die Brechungsindices der Kernsubstanz dagegen liessen eine sehr genaue Bestimmung zu. Es wurde gefunden von dem Auge

der Eule	der Index der Hornhaut	1,3777
-	- des Linsenkernes	1,4082
des Falken	- - -	1,4030
- Raben	- - -	1,4066

An dem Auge des Raben ist der Krümmungsradius der Hornhaut $= 6{,}5^{mm}$, $r_1 = 7{,}25$, $r_2 = 7{,}25$, $\varphi_1 = 25{,}8$, $h = 4{,}5$ und $a = 18{,}0$. Hieraus würde sich durch Berechnung nach der Formel ergeben

$$T = 0{,}098, \quad N_m = 1{,}4260.$$

Die Dimensionen an dem Auge der Eule waren folgende:

Krümmungsradius der Hornhaut	$9{,}5^{mm}$
Höhe der Hornhaut	7,0
Basis derselben	17,5
Radius der vorderen Linsenfläche	8,5
- - hinteren -	8,5
Axe der Linse	8,0
Durchmesser derselben	13,0
Ort der Vorderfläche der Linse	4,5
- - Hinterfläche -	12,5
- - Retina	24,0
Breite des Augenringes	10,0
Hinterer verticaler Durchmesser desselben	26,0.

8. *Die Augen von Seefischen.* Wegen des brechenden Mediums, worin die Fische leben, und wegen der abweichenden Form der Krystalllinse wurden auch die Augen des Seebarsches und des Dorsches untersucht. Da die positive Brennweite der Hornhaut bei den Fischen sehr gross ist, so wird die Formel (160) noch einfacher. Die Krystalllinse muss nahezu kugelförmig und das totale Brechungsvermögen derselben verhältnissmässig grösser sein, als bei den Landthieren. Da in den meisten Fällen $r_2 = r_1$ und φ_1 sehr gross gegen h und a ist, so wird

$$\varphi_2 = a - h,$$

d. i. gleich dem Abstande des Linsenmittelpunctes von der Retina. Ferner ist

$$T = \frac{r_1}{2(a-h)}$$

und der Brechungsindex der innersten Kernsubstanz

$$N_m = \frac{4 \cdot 1{,}3784\,(a-h)}{4{,}0628\,(a-h) - r_1}. \qquad (162)$$

a. *Das Auge des Seebarsches.* (Fig. 66.) Die Resultate der Messungen waren folgende:

Krümmungsradius der Hornhaut	$6{,}625^{mm}$
- - beiden Linsenflächen	2,5
Axe und Durchmesser der Krystalllinse	5,0
Ort der vorderen Linsenfläche	0,5
- des Linsencentrums	3,0
- der hinteren Linsenfläche	5,5
- - Retina	8,5
Verticaler Durchmesser des Auges	12,5
Brechungsindex der Hornhaut	1,3815
- des Glaskörpers	1,3352
- der äussersten Corticalschicht der Linse	1,3878
- - gallertartigen Schicht 0,0 bis $1{,}0^{mm}$ tief	1,4335
- - mittleren Kernschicht 1,5 bis $2{,}5^{mm}$ tief	1,4901
- des festen Kernes 1^{mm} Durchm.	1,5106.

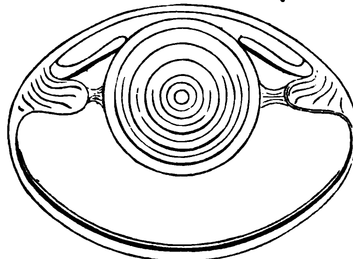


Fig. 66.
Auge des Seebarsches in 3,5facher Vergrösserung.
(Horizontaler Querschnitt.)

Aus den gegebenen Constanten findet man nun $r_1 = r_2 = 2{,}5^{mm}$, $\varphi_1 = 2200$, $h = 3{,}0$ und $a = 8{,}5$. Daraus ergibt sich durch Rechnung

$$T = 0{,}2273, \quad N_m = 1{,}5260.$$

Die Messungen ergaben im Mittel 1,5106, also $z = 0{,}08836$.

b. *Das Auge des Dorsches.* Die Messungen ergaben folgende optische Constanten:

Krümmungsradius der Hornhaut	$13{,}5^{mm}$
- - beiden Linsenflächen	4,25
Axe der Krystalllinse	8,5
Durchmesser der Krystalllinse	9,5
Ort der vorderen Linsenfläche	0,5
- des Axenmittelpunctes	4,75

Ort der hinteren Linsenfläche	9,0
- - Retina.	16,5
Brechungsindex der Hornhaut	1,3770
- - Kernsubstanz . . .	1,4950
- des destill. Wassers . .	1,3330.

Hieraus ergibt sich $r_1 = r_2 = 4{,}25$, $h = 4{,}75$ und $a = 16{,}5$. Demgemäss ist

$$T = 0{,}181, \quad N_m = 1{,}4895$$

Die Messungen ergaben für N_m im Mittel 1,4950, also $z = 0{,}0780$.

Die Brennweite φ_2 der Linse des Seebarsches im Glaskörper ist nahezu $5{,}5^{mm}$, des Dorsches 11,75; die aus z berechneten Werthe sind beziehungsweise $6{,}0^{mm}$ und $11{,}3^{mm}$.

Um noch an den gemessenen Augen mit geschichteten Linsen zu zeigen, dass vermöge der Schichtung das totale Brechungsvermögen stets grösser ist, als das des Kerncentrums, und dass diese Steigerung der Collectivität der Linsen sich in hohem Grade bei den Fischen findet, leiten wir noch die Formeln für den Totalindex N ab und stellen dann die conjugirten Werthe von T, N_m, N und N_μ in einer kleinen Tabelle zusammen.

Für die Fischlinsen lassen sich diese Formeln exacter darstellen; bei den Thieren, welche in der Luft sehen und plattere Linsen haben, begnügen wir uns mit der ersten Annäherung. Für die letztgenannten Linsenarten ist die Brennweite im Glaskörper

$$\varphi_2 = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)\,[n\,(r_1 + r_2) - (n-1)\,d]} = \frac{\varphi_1 - h}{\varphi_1 - a}\,(a - h).$$

Vernachlässigen wir das zweite Glied im Divisor, so erhalten wir den relativen Index

$$n = 1 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{(\varphi_1 - a)}{(\varphi_1 - h)\,(a - h)} = 1 + T.$$

Demgemäss ist der Totalindex bei diesen Linsenarten

$$N = 1{,}3365\ (1 + T).$$

Für die Krystalllinse der Fische ist $d = 2 r_1 = 2 r_2$ und

$$\varphi_2 = \frac{n r_1^2}{(n-1)\,[2 n r_1 - (n-1)\,d]} = \frac{n r_1}{2\,(n-1)},$$

folglich $$n = 1 : (1 - T).$$

Den Totalindex erhält man aus n, indem man diesen Werth mit dem absoluten Index des Glaskörpers multiplicirt, also

$$N = \frac{1{,}3345}{1 - T} = \frac{a - h}{(a - h) - \frac{1}{2} r_1}.$$

Um die Verstärkung der Collectivität durch die Schichtung zu erhalten, dividiren wir diese Ausdrücke durch die Gleichung

$$N_m = \frac{2 \,.\, 1{,}3784}{2{,}0314 - T} = \frac{1{,}3784}{1{,}0157 - \frac{1}{2} T}.$$

Demgemäss ist für die Krystalllinse der höheren Wirbelthiere

$$\frac{N}{N_m} = \frac{1,3365}{1,3784}\,(1,0157 - \tfrac{1}{2}\,T)\,(1 + T) = \frac{1+T}{1+T_0}\,[1 + \tfrac{1}{2}\,(T_0 - T)]$$

und für die Krystalllinse der Fische

$$\frac{N}{N_m} = \frac{1,3365}{1,3784} \cdot \frac{1,0157 - \frac{1}{2}\,T}{1 - T} = \frac{1 + \frac{1}{2}\,(T_0 - T)}{(1 + T_0)\,(1 - T)}\,.$$

Da T stets $> 0,0314$ oder T_0 ist, so ist auch immer $N > N_m$.

Die folgende Tabelle enthält eine Reihe derjenigen Werthe von T, N_m, N und N_μ (mittlerer Index), welche zwischen den Gränzen $N_m = 1,3784$ und $1,6000$ liegen.

Linsenart	T	N_m	N plätte Linsen	N Kugel-linsen	$\frac{N}{N_m}$	N_μ
T_0 homogene L. . .	0,0314	1,3784	1,3784	—	1,000	1,3784
	0,05	1,3914	1,4033	—	1,008	1,3836
L. des Menschen und der Vögel	0,0833	1,4151	1,4545	—	1,027	1,3931
L. d. jungen Schweines	0,10	1,4273	1,4701	—	1,030	1,3980
L. des Pferdes . . .	0,1242	1,4457	1,5024	—	1,039	1,4056
L. der Katze . . .	0,15	1,4653	1,5370	—	1,049	1,4132
L. des Ochsen . . .	0,1578	1,4713	1,5452	—	1,050	1,4156
L. des Kaninchen und des Dorsches . . .	0,181	1,4895	—	1,6318	1,095	1,4228
	0,20	1,5054	—	1,6706	1,109	1,4292
L. des Seebarsches .	0,2273	1,5260	—	1,7294	1,133	1,4374
	0,25	1,5477	—	1,7820	1,151	1,4461
	0,30	1,5923	—	1,9093	1,200	1,4640

Für die Bestimmung des Brechungsvermögens des innersten Linsenkernes stehen uns *drei* Mittel zu Gebote: die directe Messung, die Messung der gemischten Linsensubstanz (§ 52) und die Methode der Berechnung aus den Dimensionen des Auges. Für den „mittleren Index“ der gemischten Linsensubstanz fanden wir

$$N_\mu = N_1 + \tfrac{2}{5}\,(N_m - N_1),$$

also

$$N_m = \tfrac{1}{2}\,(5\,N_\mu - 3\,N_1), \qquad (163)$$

wo N_1 den Brechungsindex der Linsenkapsel bezeichnet. Für das Ochsenauge ist $N_\mu = 1,4139$, woraus man findet $N_m = 1,4671$. Die Messungen ergaben in der That als Index des Kernes 1,4550 bis 1,4714.

Von ganz besonderem Interesse ist es bei diesen Untersuchungen, die Brechungsindices der Linsenschichten als eine Function der Abstände derselben vom Kerncentrum darzustellen. Bei den meisten der bis jetzt untersuchten Linsen und wahrscheinlich bei den Linsen

der grossen Mehrzahl von Landwirbelthieren ist die Gleichung die einer Apollonischen Parabel, nämlich von der Form

$$N = N_m - a\left(\frac{y}{b}\right)^2 = N_m\left(1 - z\left[\frac{y}{b}\right]^2\right).$$

Nehmen wir allgemeiner an, es sei

$$N = N_m - a\left(\frac{y}{b}\right)^m = N_m\left(1 - z\left[\frac{y}{b}\right]^m\right),$$

so ist gemäss den Entwicklungen in § 54 die reciproke Brennweite der Krystalllinse im Glaskörper

$$\frac{1}{\varphi_2} = -\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\left\{\frac{b}{y}\log\text{nat}\left[1-z\left(\frac{y}{b}\right)^m\right]_{y=0}^{y=b} + \int_0^b\left(\frac{b}{y}\right)^2\log\text{nat}\left[1-z\left(\frac{y}{b}\right)^m\right]\partial\left(\frac{y}{b}\right)\right\} + C.$$

Da z immer verhältnissmässig klein ist, so reducirt sich der Ausdruck auf

$$\frac{1}{\varphi_2} = \frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\left[\frac{m}{m-1}z + (n_2 - 1)\right],$$

woraus resultirt

$$\frac{m}{m-1}z + (n_2 - 1) = T$$

und $$m = (T - 0{,}0314) : (T - 0{,}0314 - z).$$

Die Messungen geben folgende Werthe von z und m:

Krystalllinse	z	m
des Menschen . . .	0,02634	2,02
- jungen Schweines	0,03561	2,00
der Hauskatze . . .	0,04292	1,65
des Pferdes	0,04658	2,00
- Ochsen	0,06320	2,00
- des Kaninchen .	0,06840	1,78
- Dorsches . . .	0,07800	2,09
- Seebarsches . .	0,08836	1,82
	Mittel	1,92

Die Gleichung der Indices ist also nahezu

$$N = \frac{2N_0N_1}{N_0 + N_1 - TN_0} - \frac{N_0 - N_1 + TN_0}{N_0 + N_1 - TN_0}\left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

und zwar für die Krystalllinse

des Menschen . . $1{,}4157 - 0{,}0373\left(\frac{y}{b}\right)^2$,

\- Schweines . . $1{,}4293 - 0{,}0509\left(\frac{y}{b}\right)^2$,

der Hauskatze . .	$1{,}4402 - 0{,}0618 \left(\frac{y}{b}\right)^2$,
des Pferdes . . .	$1{,}4458 - 0{,}0674 \left(\frac{y}{b}\right)^2$,
- Ochsen . . .	$1{,}4714 - 0{,}0930 \left(\frac{y}{b}\right)^2$,
- Kaninchen .	$1{,}4796 - 0{,}1012 \left(\frac{y}{b}\right)^2$,
- Dorsches . .	$1{,}4950 - 0{,}1166 \left(\frac{y}{b}\right)^2$,
- Seebarsches .	$1{,}5106 - 0{,}1322 \left(\frac{y}{b}\right)^2$.

Ueber den Aplanatismus der Hornhaut*). In § 39 ist bei Gelegenheit der Betrachtung der Ungenauigkeit der durch sphärische Linsen erzeugten Bilder bereits erwähnt worden, dass die Randstrahlen brechender Kugelflächen eine andere Brennweite als die Centralstrahlen haben, und dass man die Differenz der beiden Brennweiten die *sphärische Längenabweichung* nennt. Mathematische Betrachtungen ergeben, dass bei convexen sphärischen Linsen die Brennweite der Randstrahlen kleiner ist, als die der Centralstrahlen. Die sphärische Längenabweichung $\varDelta$ ist demnach in diesem Falle negativ und sämmtliche gebrochene Lichtstrahlen hüllen eine sogenannte kaustische Fläche ein. Ist für irgend eine gekrümmte Fläche $\varDelta$ gleich Null, oder reducirt sich die kaustische Fläche auf einen Punct, so heisst die brechende Fläche *aplanatisch*. — Aplanatische Curven, Flächen und Systeme. § 58.

Durch die genauen Messungen der Krümmungen der vorderen Hornhautfläche von Senff, Helmholtz, Knapp, Woinow und Adamük ist in neuester Zeit mit völliger Evidenz festgestellt, dass die Scheitelfläche der Hornhaut nicht eine sphärische Fläche sein kann, sondern dass die Berührungscurven zweiter Ordnung der verschiedenen Meridionalschnitte Ellipsen sind von ganz verschiedenen Excentricitäten, deren grösste Hauptaxen nahezu mit der optischen Axe und der Gesichtslinie zusammenfallen. Diese Ellipsen haben weder gleiche Krümmungsradien in ihrem gemeinschaftlichen Pole, noch gleiche Hauptaxen. Es ist demnach auch völlig unzulässig, die Umhüllungsfläche sämmtlicher coaxialer Ellipsen als ein dreiaxiges Ellipsoid anzusehen. Auch ist es bei den an allen Augen vorkommenden, unter einander sehr abweichenden Refractionsanomalien der Hornhaut und bei dem gegenwärtigen Umfang unserer Kenntniss von der geometrischen Beschaffenheit der Hornhautfläche noch nicht möglich,

*) Vgl. Matthiessen, Aplanat. d. Hornh. im Arch. f. Ophthalmol. Bd. XXII. 1876.

mit Sicherheit aus dem Mittel vieler Messungen an individuellen Augen die Ellipticitäten der einzelnen Meridionalschnitte für eine normale Hornhautfläche festzustellen. Worin diese Ellipsen jedoch sämmtlich übereinzustimmen scheinen, ist der Umstand, dass die grössten Hauptaxen nahezu mit der Gesichtslinie coincidiren.

Der letzte Umstand wird nun für die Brechungsverhältnisse an der Hornhaut von der grössten Wichtigkeit, weil ihre Meridionalschnitte dadurch aplanatische Curven werden für eine bestimmte Objectweite. Es soll durch die folgende Analysis in erster Annäherung gezeigt werden, dass eine normale Hornhautfläche aplanatisch ist für Objecte, welche im Nahepunct oder in der Entfernung des deutlichen Sehens liegen, wobei also die Bilder der Objecte und die Fehler derselben ein Maximum werden.

Es sei SM (Fig. 67) oder r_0 der Krümmungsradius im Scheitel S eines der Haupt-Meridionalschnitte des Hornhautscheitels, M der Krümmungsmittelpunct, ME die Evolute der Ellipse von den Halbaxen a und b, und Φ der Ort des Bildes irgend eines leuchtenden Punctes, welcher in der Verlängerung der Axe gelegen ist. Wir

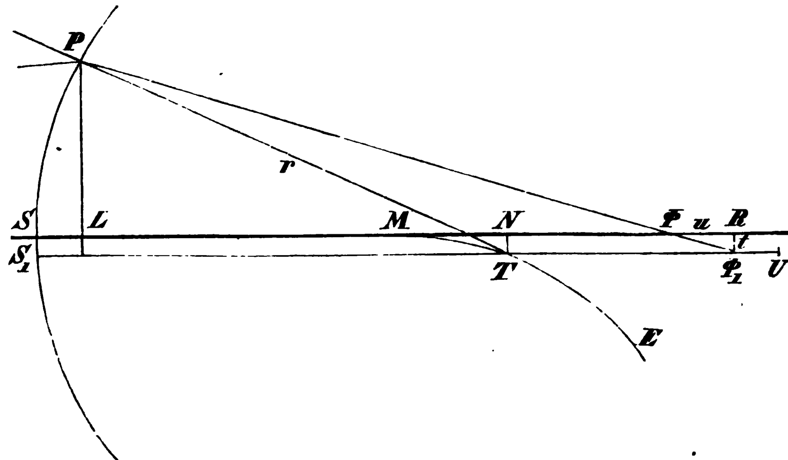


Fig. 67.

nehmen dabei der Einfachheit der Betrachtungen wegen an, dass die grösste Hauptaxe der Ellipse mit der Gesichtslinie coincidire.

Es sei ferner P irgend ein anderer Punct der Ellipse vom Krümmungsradius $PT = r$, S_1T die optische Nebenaxe im Abstande t von der Hauptaxe, Φ_1 der Convergenzpunct der in P gebrochenen Strahlen. Wenn demnach die brechende Fläche ein Rotationskörper ist, so wird t der Radius des Zerstreuungskreises aller im Abstande $PL = y$ von der Axe gebrochenen Strahlen im Abstande SR auf

der Gesichtslinie sein. Für den Fall des Aplanatismus müssen diese Strahlen die Hauptaxe ebenfalls in Φ schneiden. Wir wollen zunächst die Bedingungsgleichung aufsuchen, welche erfüllt werden muss, wenn dies eintreten soll.

Wir bezeichnen den Abstand des leuchtenden Punctes vom Scheitel S mit x_0, den seines Bildes Φ mit x_1, die erste Hauptbrennweite mit f, die zweite mit φ, so ist

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1,$$

oder auch

$$-\frac{1}{x_0} + \frac{n}{x_1} = \frac{n-1}{r_0}.$$

Für einen andern Punct P der brechenden Curve gilt daneben die Gleichung

$$-\frac{1}{x_0} + \frac{n}{x_2} = \frac{n-1}{r},$$

worin x_2 den Abstand $S_1 U$ auf der optischen Nebenaxe bezeichnen möge, so dass U den Ort des Bildes angeben würde, wenn für die Randstrahlen keine Längenabweichung stattfände. Es liegt nun freilich das Object nicht in der optischen Nebenaxe, also auch nicht genau sein Bild. Es wird aber in den folgenden Betrachtungen von der Voraussetzung ausgegangen werden, dass x_0 gegen r_1, x_1 und x_2 immer sehr gross bleiben soll, wodurch die Annahme, dass U als Ort des Bildes anzusehen sei, gerechtfertigt erscheint.

Subtrahiren wir beide Gleichungen von einander, so erhalten wir

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right).$$

Bezeichnen wir die Grösse der Aberration mit A, so ist nun $x_1 = S\Phi$, $A = \Phi_1 U$, $x_2 = S_1 U$; folglich $x_2 - A = S_1\Phi_1 = SR = S\Phi - u$. Da nach allen Messungen der Krümmungen der Meridionalschnitte die horizontale Axe $2a$ der Ellipse grösser ist als die verticale oder transversale, so nimmt r mit dem Bogen SP oder mit der Ordinate y zu und es ist $r > r_0$, also auch $x_2 > x_1$.

Mit Hülfe der obigen Refractionsformeln findet man nun unter Berücksichtigung der Voraussetzung, dass x_0 gegen r immer sehr gross bleiben soll,

$$x_2 - A = S_1\Phi_1 = \frac{nr}{n-1} - \frac{nr^2}{(n-1)^2 x_0} - A,$$

$$x_1 = S\Phi = \frac{nr_0}{n-1} - \frac{nr_0^2}{(n-1)^2 x_0},$$

und

$$x_2 - A = x_1 + u.$$

Den Werth von u bestimmt man aus t vermittels der Gleichung

$$u : t = \frac{n r_0}{n - 1} : y$$

und t aus der Gleichung für die Evolute. Man findet

$$t = \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3$$

und wenn man diesen Werth einsetzt,

$$u = \frac{n r_0}{n - 1} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2.$$

Die Bedingung des Aplanatismus lässt sich demgemäss ausdrücken durch

$$\frac{nr}{n-1} - \frac{nr^2}{(n-1)^2 x_0} - A = \frac{n r_0}{n-1} - \frac{n r_0^2}{(n-1)^2 x_0} + \frac{n r_0}{n-1} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{n-1}{n}$, so erhält man

$$r - \frac{r^2}{(n-1) x_0} - \frac{n-1}{n} A = r_0 - \frac{r_0^2}{(n-1)^2 x_0} + r_0 \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2.$$

Da r von r_0 sehr wenig verschieden ist, so nimmt die Gleichung nach einigen Reductionen die folgende Form an:

$$r - r_0 = \frac{\frac{n-1}{n} A + r_0 \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2}{1 - \frac{2 r_0}{(n-1) x_0}},$$

oder wenn man auf der rechten Seite im Dividenden $b^2 : a$ an die Stelle von r_0 setzt

$$r - r_0 = \frac{\frac{n-1}{n} A + \frac{a^2 - b^2}{a b^2} y^2}{1 - \frac{2 r_0}{(n-1) x_0}}.$$

Nun ist der analytische Krümmungsradius

$$r = \frac{b^2}{a} \left[1 + \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2\right]^{3/2}$$

und da y im Verhältniss zu b sehr klein bleibt,

$$r = \frac{b^2}{a} + \frac{3}{2} \frac{a^2 - b^2}{a b^2} y^2$$

oder

$$r - r_0 = \frac{3}{2} \frac{a^2 - b^2}{a b^2} y^2.$$

Setzen wir die beiden Werthe von $r - r_0$ einander gleich, so wird die Ellipticität der brechenden Curve bestimmt durch die Relation

$$\frac{3}{2} \left(1 - \frac{2 r_0}{(n-1) x_0}\right) \frac{a^2 - b^2}{a b^2} y^2 = \frac{n-1}{n} A + \frac{a^2 - b^2}{a b^2} y^2,$$

oder endlich

$$\left(1 - \frac{6 r_0}{(n-1) x_0}\right) \frac{a^2 - b^2}{a b^2} y^2 = \frac{2 (n-1)}{n} A.$$

Es erübrigt noch die Grösse A oder die Längenabweichung $\Phi_1 U$ aufzufinden. Die Aberration für eine einzelne Fläche wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$A = \frac{n-1}{n^3} x_2^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x_0}\right)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{n+1}{x_0}\right) \frac{y^2}{2}.$$

Da aber x_0 immer sehr gross gegen r bleiben soll und r in diesen kleinen Grössen zweiter Ordnung gleich r_0 gesetzt werden kann, so reducirt sich der Ausdruck auf

$$A = \frac{(n-1)\, x_2^2 y^2}{2 n^3 r_0^3} = \frac{(n-1)\, a^3 x_2^2 y^2}{2 n^3 b^6}.$$

Ferner kann man, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, setzen

$$x_2 = \frac{n r_0}{n-1}.$$

Dadurch erhält man

$$A = \frac{a}{2n(n-1)} \cdot \frac{y^2}{b^2}.$$

Die Gleichung der Ellipticität reducirt sich so auf

$$\left(1 - \frac{6 r_0}{(n-1)\, x_0}\right) = \frac{a^2}{n^2 (a^2 - b^2)} = \frac{1}{n^2 \varepsilon^2},$$

wo ε die Excentricität der Ellipse bezeichnet.

Man kann nun zur Berechnung specieller Werthe des Axenverhältnisses oder der Objectweite, für welche die Curve aplanatisch wird, folgende Formeln bilden

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{6 r_0 - (n-1)\, x_0}{6 r_0 - \frac{n^2-1}{n^2}(n-1) x_0}}, \qquad (164)$$

$$\frac{x_0}{r_0} = \frac{6 n^2 \varepsilon^2}{(n-1)(n^2 \varepsilon^2 - 1)}. \qquad (165)$$

Es bezeichnet nun weiter n den Brechungsindex des Kammerwassers 1,3365. Setzen wir den Werth ein, so resultirt

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{6 r_0 - 0{,}3365\, x_0}{6 r_0 - 0{,}1481\, x_0}} \qquad (166)$$

und

$$x_0 = 17{,}832\, r_0 \frac{\varepsilon^2}{0{,}5600 - \varepsilon^2}. \qquad (167)$$

Zur Fixirung der Ideen und zur Beurtheilung der Werthe der möglichen Axenverhältnisse innerhalb des ganzen Accommodationsbereiches bei eintretendem Aplanatismus, möge hier eine kleine Tabelle berechneter Werthe Platz finden, wobei angenommen ist, dass der von den Ellipticitäten ganz unabhängige Werth von $r_0 = 7{,}66^{mm}$ betrage.

x_0	$a : b$
$-\infty$	1,508
400^{mm}	1,306
300	1,275
250	1,252
200	1,224
160	1,198
150	1,189
135	1,177
125	1,168
100	1,141
64	1,100
0	1,000

Vergleichen wir nun diese berechneten Zahlenwerthe mit den Resultaten der Messungen von Senff, Helmholtz und Knapp, so ergeben diese*) für den horizontalen Meridian als Mittel aus neun Messungen

$$\frac{a}{b} = \frac{10,908}{9,105} = 1,198, \quad r_0 = 7,625^{mm};$$

für den verticalen Meridian als Mittel aus sieben Messungen

$$\frac{a}{b} = \frac{10,297}{8,746} = 1,177, \quad r_0 = 7,658^{mm},$$

endlich fünfzehn Messungen von Woinow und Knapp für den horizontalen Meridian als Mittel

$$\frac{a}{b} = \frac{10,690}{8,973} = 1,191, \quad r_0 = 7,578^{mm}.$$

Diesen mittleren Axenverhältnissen der elliptischen Meridiane entsprechen die Objectweiten $160,4^{mm}$, $135,4^{mm}$, $152,2^{mm}$. Wenn also das Axenverhältniss $a : b = 1,190$ einer normalen Hornhaut entspräche, so wäre 150^{mm} die Objectweite, bei welcher die vollkommenste Vereinigung der Rand- und Centralstrahlen stattfände. Zugleich genügt die Zahl 150 annähernd der Voraussetzung, dass x_0 verhältnissmässig gross gegen r_0 sei. Dass nun in Wirklichkeit viele Anomalien an der Hornhaut vorkommen und dieselbe von ihrer normalen Form vielfach degenerirt ist, ergibt sich aus folgender Tabelle, worin die conjugirten Werthe von x_0 und $a : b$ aus 30 Messungen berechnet worden sind. Die Mittelwerthe der letzten Columne sind aus denen der übrigen Columnen abgeleitet.

*) Man vergl. Aubert, Physiol. Optik im Handb. der Ophthalmologie von Gräfe und Sämisch Cap. IX. S. 419.

I. Horizontaler Meridian:

Beobachter		r_0	a	b	$a : b$	x_0
Senff . .	I	7,794	10,435	9,019	1,157	114,54 mm
Helmholtz	II	7,646	10,100	8,788	1,150	104,50
	III	7,338	13,027	9,777	1,332	463,67
	IV	8,154	11,711	9,772	1,200	172,32
Knapp .	V	7,770	10,523	9,043	1,164	121,45
	VI	8,030	10,875	9,344	1,164	123,48
	VII	7,165	8,602	7,850	1,096	54,41
	VIII	7,205	10,134	8,545	1,187	137,05
	IX	7,520	12,763	9,797	1,303	369,17
Woinow *)	Xa	7,754	13,656	10,290	1,327	463,04
	Xb	8,283	13,612	10,619	1,282	339,71
	XIa	7,202	8,630	7,884	1,095	53,74
	XIb	7,120	8,624	7,836	1,101	57,32
	XIIa	7,885	9,698	8,745	1,109	70,30
	XIIb	7,988	9,695	8,800	1,102	65,06
	XIIIa	7,950	11,808	9,688	1,219	197,38
	XIIIb	8,138	11,623	9,703	1,198	166,80
	XIVa	7,812	11,514	9,484	1,214	187,78
	XIVb	7,849	10,216	8,955	1,141	98,78
	XVa	7,241	9,846	8,443	1,166	115,57
	XVb	7,212	9,929	8,462	1,173	122,95
Adamük u. Woinow **)	XVI	7,230	9,228	8,168	1,130	81,26
	XVII	7,156	8,570	7,831	1,094	53,30
	XVIII	6,852	13,685	9,684	1,413	400,13
	Mittel:	7,596	10,771	9,022	1,188	(147,04)

II. Verticaler Meridian:

Beobachter		r_0	a	b	$a : b$	x_0
Senff . .	Ia	7,796	9,452	8,583	1,101	63,41 mm
	Ib	7,746	11,243	8,344	1,347	560,50
Knapp .	V	7,854	11,495	9,501	1,210	182,50
	VI	8,255	11,629	9,794	1,187	158,90
	VII	(7,270)	(7,570)	(7,419)	(1,020)	(9,83)
	VIII	7,077	11,385	8,771	1,298	334,28
	IX	7,611	9,301	8,813	1,055	30,29
	Mittel:	7,723	10,751	8,968	1,199	(163,79)
Mittel aus 30 Beob.		7,621	10,767	9,011	1,1905	156,33

*) Vergl. Woinow, Beitr. zur Kenntniss des Winkels α. Arch. f. Ophthalmol. XXI. I. S. 228.

**) Adamük u. Woinow, Ueber die Accommodation der Presbyopen. Arch. f. Ophthalmol. XVI. I. S. 150.

Die Mittel aus diesen 30 Beobachtungen, von denen die eine (Knapp VII. V. M.) unberücksichtigt blieb, geben uns annähernd eine Characteristik der Wölbung des Scheitels einer *normalen Hornhaut.* Da die beiden Meridionalschnitte in ihrer Ellipticität bei der vorliegenden Anzahl der Messungen einen Unterschied definitiv noch nicht erkennen lassen, so wird man als eine normale Hornhautfläche diejenige betrachten können, welche durch Rotation einer Ellipse von den Halbaxen $a = 10{,}767$ und $b = 9{,}011$ um die grösste Axe $2a$ gebildet wird. Die Elemente eines der elliptischen Meridiane sind

Krümmungsradius im Pole (Scheitel)	$\frac{b^2}{a}$	$= 7{,}621^{mm}$
Grösste Halbaxe des Ellipsoides	a	$= 10{,}767$
Kleinste Halbaxe	b	$= 9{,}011$
Axenverhältniss $2a : 2b$		$= 1{,}1905$
Quadrat der Excentricität	ε^2	$= 0{,}3000$
Objectweite beim schärfsten Sehen	x_0	$= -156{,}33$
Abstand des conjugirten Punctes von der Cornea	x_1	$= 35{,}40$
„ von der Vorderfläche der Linse . . .		$= 32{,}20$
Zweite Hauptbrennweite der Hornhaut	φ_1	$= 30{,}272.$

§ 59. **Ueber den Aplanatismus der geschichteten Linse.** Die mathematischen Betrachtungen des vorhergehenden Abschnittes lassen sich auch auf die Krystalllinse anwenden, indess sind dieselben offenbar ungleich schwieriger, weil wir es hier nicht mit einer einzigen Fläche, sondern mit einem System von unendlich vielen aneinander liegenden brechenden Schichten zu thun haben. In § 52 ist bereits im Allgemeinen angedeutet, dass das eigenthümliche Gefüge und die anfangs rasche und gegen das Centrum hin immer langsamere Zunahme des Brechungsindex der Krystalllinse für die dioptrische Wirkung derselben von der allergrössten Bedeutung sei. Einerseits wird nämlich durch die concentrische Schichtung und das nach innen wachsende Brechungsvermögen ein totales Brechungsvermögen der Linse erzielt, welches bei einigen Thieren das des Quarzes noch übertrifft. Andrerseits aber wird durch das eigenthümliche Gesetz des Wachsthums der Brechungsindices von aussen nach innen, welches sich durch die Gleichung einer Parabel darstellen lässt, die Aberration der Lichtstrahlen möglichst, vielleicht sogar bei einem normalen Auge vollkommen vermieden. Wenn nun schon bei der Hornhaut die specifische Krümmung derselben auf diese Bestimmung hinweist, so regt noch in viel höherem Grade die specifische Beschaffenheit der Linse unsere Wissbegierde an. Da aber ihre Form durch Accommodation veränderlich ist, so können wir unsere Frage: ist die Linse ein aplanatisches System? nur in ganz specieller Form stellen. Da die Hornhaut nur aplanatisch wird für naheliegende Objecte, so genügt

es vorläufig die Frage zu beantworten: Ist die Linse aplanatisch im Zustande der Accommodation für die Nähe? Indem wir also eine nahezu gleichseitig biconvexe Linse erhalten, gewinnt die Untersuchung an Einfachheit.

Um diese schwierige Untersuchuug nun nicht ganz ohne Aussicht auf einigen Erfolg einzuleiten, will ich zuvor durch eine einfache Ueberlegung zeigen, dass die Krystalllinse schon wegen ihrer schalenförmigen Schichten und der von aussen nach innen zunehmenden optischen Dichtigkeit eine viel geringere Aberration erzeugen muss, als wenn sie homogen wäre. Sie kann geradezu als das Muster eines vollkommenen aplanatischen Systems für verschiedene Objectweiten hingestellt werden. Denken wir uns nun die Krystalllinse der Einfachheit der Betrachtung wegen zusammengesetzt aus einer homogenen Fundamentallinse und aus einer kugelförmigen Kernlinse, deren Radius kleiner ist als der der Pupille, so werden die Strahlen, welche am Rande der Pupille etwa parallel mit der Axe in die Linse eintreten, wegen der starken Krümmung der Flächen eine beträchtliche negative Aberration gegen die Centralstrahlen der Fundamentallinse zeigen; die grössere Brennweite der Centralstrahlen wird aber von dem hier hinzutretenden Kerne in gleichem Grade vermindert. Denkt man sich nun statt jener zwei brechenden Schichten unendlich viele, so leuchtet ein, dass wegen des seitwärts abnehmenden Brechungsvermögens der Linsensubstanz auch die Aberration der in wachsenden Abständen von der Axe der Linse einfallenden Strahlen abnehmen muss. Hierbei ist wohl denkbar, dass die Längenabweichung für Central- und Randstrahlen eine constante ist und zwar bei ersteren wegen des dichteren Kernes, bei letzteren wegen der sphärischen oder ellipsoidischen Gestalt.

Um nun den Einfluss der Schichtung der Linse in ein klares Licht zu stellen, möge zuerst gezeigt werden, wie gross die sphärische Längenabweichung für Strahlen, welche den Strahlenkegel der Pupille begrenzen, sein würde, wenn die Linse homogen wäre und das totale Brechungsvermögen $^{16}/_{11} = 1,4545$ besässe.

Es sei wiederum x_0 die negative Objectweite eines in der Hauptaxe gelegenen leuchtenden Punctes, x_1 der positive Abstand des Bildes von der Linse, r_1 und r_2 die absoluten Werthe der Krümmungsradien der Flächen, $2y$ der Durchmesser der Pupille und A die Aberration der am Rande der Pupille in die Linse eintretenden Lichtstrahlen, so ist bei Vernachlässigung der Linsendicke und der dritten und höheren Potenzen der Winkel, welche die durchgehenden Strahlen mit der Axe bilden*)

*) Man vergl. v. Lang, Einl. in die theor. Phys. § 196.

$$-\frac{1}{x^0}+\frac{1}{x_1-A}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+$$
$$\frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{x_0}\right)^2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{n+1}{x_0}\right)+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{x_1-A}\right)^2\left(\frac{1}{r_2}+\frac{n+1}{x_1-A}\right)\right]\frac{y^2}{2}.$$

Da für $y=0$ auch $A=0$ wird, so geht diese Gleichung in dem speciellen Falle über in die Normalgleichung für Centralstrahlen, nämlich

$$-\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right),$$

wo r_1 und r_2 die absoluten Werthe der Krümmungsradien der brechenden Flächen sind, welche wir jetzt noch als sphärisch betrachten wollen.

Aus der Verbindung der beiden vorhergehenden Gleichungen geht hervor, dass A nur Glieder enthält, die mit y^2 multiplicirt sind. Es kann daher bei dem angenommenen Grade der Näherung in den mit y^2 multiplicirten Gliedern A vernachlässigt werden, woraus folgt

$$-\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1-A}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+$$
$$\frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{x_0}\right)^2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{n+1}{x_0}\right)+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{x_1}\right)^2\left(\frac{1}{r_2}+\frac{n+1}{x_1}\right)\right]\frac{y^2}{2}.$$

Subtrahirt man hiervon die zweite Gleichung

$$-\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right),$$

so resultirt

$$\frac{1}{x_1-A}-\frac{1}{x_1}=\frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{x_0}\right)^2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{n+1}{x_0}\right)+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{x_1}\right)^2\left(\frac{1}{r_2}+\frac{n+1}{x_1}\right)\right]\frac{y^2}{2},$$

oder da A gegen x_1 verhältnissmässig klein sein wird,

$$A=\frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{x_0}\right)^2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{n+1}{x_0}\right)+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{x_1}\right)^2\left(\frac{1}{r_2}+\frac{n+1}{x_1}\right)\right]\frac{x_1^2\,y^2}{2}.$$

Hierbei ist angenommen, dass die Linse in einem homogenen Medium liege. Setzen wir ferner voraus, dass die Linse stark accommodirt, also nahezu gleichseitig biconvex sei von den Radien $r_1=5{,}6^{mm}$ und $r_2=5{,}6^{mm}$, so vereinfacht sich die Gleichung der Aberration noch mehr, und weil in diesem Falle

$$-\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}=\frac{2(n-1)}{r_1}$$

ist, so reducirt sich die Gleichung nach Elimination von x_1 auf die folgende:

$$A=\frac{n-1}{2n^2}\left[\left(\frac{2n-1}{r_1}-\frac{1}{x_1}\right)^2\left(\frac{2n^2-1}{r_1}-\frac{n+1}{x_1}\right)+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{x_1}\right)^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{n+1}{x_1}\right)\right]x_1^2y^2.$$

Erwägen wir nun, dass die Brennweite der Linse ungefähr $32{,}5^{mm}$, der Abstand der Retina vom optischen Mittelpuncte der Linse $16{,}25^{mm}$ beträgt, so ist

$$-\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{32{,}5}$$

und wegen $x_1 = +16{,}25$ der conjugirte Werth $x_0 = +32{,}5$. Daneben hat n den Werth 1,0875. Man kann demgemäss setzen

$$\varphi = \frac{r_1}{2(n-1)} = 32{,}5 = x_0 = 2x_1,$$

oder

$$x_1 = \frac{r_1}{4(n-1)}\,.$$

Substituiren wir diesen Werth in die Gleichung der Aberration, so erhalten wir

$$A = \frac{1}{16}\left\{\frac{28n^3-36n^2-9n+18}{n(n-1)r_1}\right\}y^2.$$

Nun ist n wenig von der Einheit verschieden. Setzen wir $n = 1{,}0875 = 1+\omega$, so wird

$$\frac{28n^3-36n^2-9n+18}{n} = 1+2\omega = n^2\,,$$

mithin

$$A = \frac{n^2}{16(n-1)}\cdot\frac{y^2}{r_1}\,.$$

Setzen wir den Werth $n = 1{,}0875$ ein, $r_1 = 5{,}6^{mm}$, $y = 2^{mm}$, so würde die Aberration A gleich $0{,}6034^{mm}$ sein, ein Werth, welcher bedeutend genug erscheint eine Undeutlichkeit des Bildes herbeizuführen.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie gross die sphärische Längenabweichung sei für die Strahlen des Pupillenrandes gegen die Centralstrahlen, wenn die geschichtete Linse zu Grunde gelegt wird. Soll die Krystalllinse aplatanisch sein, so muss die Differenz gerade so viel betragen, als die Differenz der Brennweite, welche durch die Refraction der Centralstrahlen in dem Kernlinsenelement hervorgebracht wird, dessen Durchmesser 2ϱ beträgt.

Es möge zunächst die Brennweite dieses Kernlinsenelementes berechnet werden. Ist φ die positive Brennweite der ganzen Linse im Glaskörper, φ''' die Brennweite des innern Kernlinsenelementes, so ist die Brennweite der ganzen Linse ohne das Kernlinsenelement bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{\varphi'''}=\frac{1}{\varphi}-\int_0^{b\frac{\varrho}{c}}\frac{4a\,\partial\left(\frac{y}{b}\right)}{r_1\left[Nm-a\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]},$$

wo c der halbe Durchmesser der ganzen Linse, b die Halbaxe derselben bezeichnet; dabei hat y wieder die frühere Bedeutung, nämlich den Abstand einer unendlich dünnen Linsenschicht vom Centrum. Nach dem Frühern können wir näherungsweise setzen

$$\frac{1}{\varphi'''} = \frac{4 z \varrho}{r_1 c}.$$

Nun ist $z = 0,02827$, $r_1 = 5,6^{mm}$, $\varrho = 2^{mm}$, $c = 4,5^{mm}$. Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\varphi'''} = \frac{1}{111,5}.$$

Es ist aber $\varphi = 32,5$, also

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi'''} = \frac{1}{32,5} - \frac{1}{111,5} = \frac{1}{45,87},$$

allgemein

$$A_0 = \varphi^2 : (\varphi''' - \varphi).$$

Es beträgt also die durch das innere Kernlinsenelement bewirkte Aberration $45,87 - 32,5 = 13,37^{mm}$ und dieser Werth müsste im Falle des Aplanatismus ebenfalls durch die Randstrahlen der Pupille erreicht werden. Wir wollen untersuchen, ob dieses möglich ist.

Zunächst folgt aus der Gleichung für A_0, dass wenn φ''' sehr gross, also ϱ sehr klein gegen den Durchmesser der Linse ist, A_0 nahezu proportional ϱ wird, nämlich

$$A_0 = \frac{4 z \varrho \varphi^2}{r_1 c},$$

wobei zu erwägen ist, dass dieses Gesetz der Proportionalität allein abhängig ist von dem Gesetze der Zunahme des Brechungsindices der Linsenschichten von aussen nach innen. Dieses war nach den angestellten Messungen

$$N = N_\mu - a \left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

Da dieses Gesetz vorläufig nur annähernd das Naturgesetz darstellen soll, so lange dasselbe nicht einer genauern Prüfung unterworfen ist, so kann es möglicherweise etwas anders sein. Wäre es nun etwa

$$N = N_\mu - a \left(\frac{y}{b}\right)^3$$

so würde A_0 dem Quadrate von ϱ proportional sein. Diese Frage wird von Bedeutung bei der Lösung des von uns vorgestellten Problems.

Wir theilen dasselbe in zwei Theile und berechnen erstlich die Aberration der Randstrahlen der Fundamentallinse und darauf die Aberration, durch die Randstrahlen der Kernlinse hervorgerufen, so weit diese von den durchgehenden Lichtstrahlen getroffen wird. Der physikalische Vorgang wird durch die nebenstehende Figur erläutert; $\Phi_1\ \Phi$ ist die Differenz der Brennweiten.

Für die homogene Fundamentallinse ist nach dem Vorigen

$$A_1 = \frac{n^2}{16(n-1)} \cdot \frac{\varrho^2}{r_1}.$$

Führen wir die betreffenden Zahlenwerthe an, so ist

$$n = \frac{1,3750}{1,3365} = 1,0288,\ \varrho = 2^{mm},\quad \text{und } r_1 = 5,6^{mm};\ \text{mithin}$$

$$A_1 = 1,64^{mm}.$$

Dieser Werth ist gegen $A_0 = 13,37^{mm}$ sehr klein.

Wir werden weiter sehen, dass auch die durch die concentrische Schichtung der Kernlinse bewirkte Aberration noch zu klein gegen A_0 bleibt.

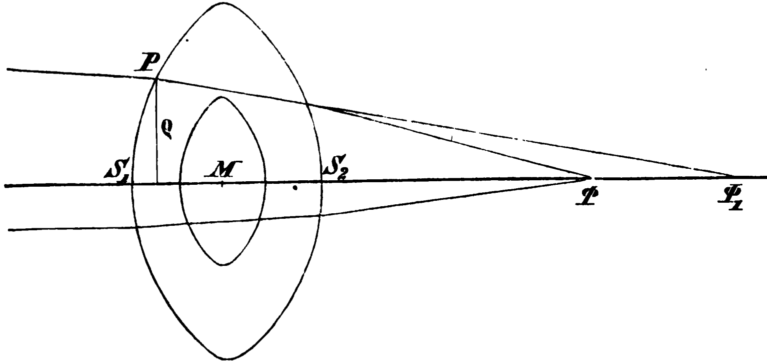


Fig. 68.

Für die Schichten in der Nähe des von den Randstrahlen der Pupille umgangenen Kernes, werden nun freilich die durchgehenden Strahlen wahre Randstrahlen. Es dürfen mithin bei dieser Betrachtung die höheren Potenzen des Bogens $S_1 P$ nicht mehr vernachlässigt werden. Diese Schwierigkeit des Calcüls suchen wir dadurch zu umgehen, dass wir ϱ noch möglichst klein annehmen z. B. $0,5^{mm}$. In diesem Falle wird $A_0 = 2,55^{mm}$ und $A_1 = 0,10^{mm}$. Die Integration ist alsdann zwischen den Gränzen $y = b$ und $\frac{0,5}{4,5}\, b = 0,11\, b$ vorzunehmen. Das Differenzial von A finden wir durch folgende Betrachtung.

Wir fanden

$$A = \frac{n-1}{2n^2}\left[\left(\frac{2n-1}{r} - \frac{1}{x_1}\right)^2\left(\frac{2n^2-1}{r} - \frac{n+1}{x_1}\right) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{x_1}\right)^2\left(\frac{1}{r} + \frac{n+1}{x_1}\right)\right] x_1^2\, \varrho^2.$$

Hierin ist nun beim Uebergange von einer Schicht zur anderen $n - 1 = \partial n$, $n = 1$, $r = r_1 \frac{y}{b}$ und $x_1 = \frac{r_1}{4(n_1 - 1)}$, wo $n_1 = 1,0288$ zu setzen ist. Da r klein gegen x_1 ist, so geht die Gleichung für einen kleinen Zuwachs von A über in

$$\partial A = \frac{\varrho^2}{16 r_1 (n_1 - 1)^2} \cdot \frac{b^3}{y^3}\, \partial n$$

und weil nach dem Früheren (§ 54)

$$\partial n = -\,2 z\, \frac{y\, \partial y}{b^2}$$

ist, so erhalten wir

$$\int \partial A = -\frac{z\varrho^2}{8r_1(n_1-1)^2}\int \frac{\partial\left(\frac{y}{b}\right)}{\left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Zwischen den Gränzen b und $b\frac{\varrho}{c}$ erhalten wir nun

$$A_2 = -\frac{z}{8r_1(n_1-1)^2}(\varrho^2 - \varrho c).$$

Setzen wir aber $\varrho = 0{,}5^{mm}$, so resultirt

$$A_2 = 1{,}55^{mm}.$$

Hieraus folgt, dass die Randstrahlen der Pupille eine grössere Brennweite haben, als die Centralstrahlen. Ob die Compensation dieses Fehlers durch die Linse selbst geschieht oder durch die Hornhaut, ist jetzt nicht möglich nachzuweisen. Wahrscheinlich ist dieses letztere der Fall, da die Aberrationen wegen der Krümmung der Hornhaut der Ordinate ϱ quadratisch, dagegen wegen der Krümmung der Linsenschichten einfach proportional wachsen. Diese Functionen können freilich nicht congruent werden. Es ist aber sehr wohl möglich, dass die Krümmungsverhältnisse der Schichten in jedem beliebigen Zustande der Accommodation eine solche ist, dass die Brennweiten der Centralstrahlen und der Randstrahlen der Pupille gleich bleiben. Abweichungen hiervon sind jedoch ebenfalls beobachtet worden.

§ 60. **Von der Farbenzerstreuung in den flüssigen Augenmedien.** Die Lichtstrahlen, welche von einem in der Nähe der optischen Axe liegenden leuchtenden Puncte in das Auge eintreten, kreuzen nach der Brechung sich nur dann in einem einzigen Puncte wieder, wenn der Punct homogenes Licht ausstrahlt. Da verschiedenfarbiges Licht eine ungleiche Brechbarkeit besitzt, so wird das Auge wie alle dioptrischen Systeme auch für die verschiedenen Farben eine verschiedene Brennweite habe. Wenn also das Auge in Bezug auf eine bestimmte Farbe z. B. die Fraunhofersche Linie *D* oder das Licht des glühenden Natriumdampfes accommodirt ist, so werden die gebrochenen Strahlenkegel des anders farbigen Lichtes auf der Retina Zerstreuungskreise bilden und die Ränder der Objecte farbig und ohne Schärfe erscheinen lassen. Man nennt dieses Verhalten im dioptrischen System die *chromatische Abweichung* und das Verhalten des Auges die *Chromasie* desselben. In § 39 ist bereits gezeigt worden, dass bei Linsensystemen, welche aus verschiedenen Medien bestehen, unter gewissen Bedingungen die Chromasie derselben grösstentheils gehoben werden kann, so dass sie für das Auge unmerklich wird. — *Achromatische Linse — Achromatismus.* Ein solches achromatisches System ist das Auge zwar nicht, indessen ist beim gewöhnlichen Sehen in ein unbeschränktes Gesichtsfeld die Farbenzerstreuung unmerklich,

da theils die Dispersion der Augenmedien sehr gering ist, theils die Helligkeit der hiedurch entstehenden Zerstreuungskreise vom Centrum nach der Peripherie rasch abnimmt, während die Zerstreuungskreise der falschen Accommodation in allen Theilen gleiche Helligkeit besitzen. Von dem Umstande, dass das Auge nicht achromatisch ist, obwol wir es unter gewöhnlichen Verhältnissen nie wahrnehmen, kann man sich durch verschiedene Versuche bei aufmerksamer Beobachtung leicht überzeugen.

Erstlich nämlich ist die Accomodationsweite für verschiedenfarbige Objecte eine ungleiche, mit andern Worten: gleich weit entfernte aber verschieden farbige Objecte erscheinen in ungleicher Entfernung; sodann macht sich die Chromasie des Auges besonders merklich bei scharfer Abgränzung eines hellen Gesichtsfeldes durch einen schwarzen Schirm.

Man stelle in einem dunklen Zimmer in grösserer Entfernung einen Argandbrenner mit Milchglascylinder auf und schneide durch einen dunklen Schirm am Rande eine helle Lichtlinie ab. Stellt man nun etwa 80^{cm} vom Auge entfernt einen zweiten dunklen Schirm auf und visirt auf den scharfen verticalen Rand desselben die hellglänzende Lichtlinie ein, so hebt sich von derselben ein farbiges Lichtband ab, dessen scheinbare Breite ungefähr 14 Minuten beträgt. Ist K (Fig. 69) der Knotenpunct des auf die Lichtlinie L für Roth

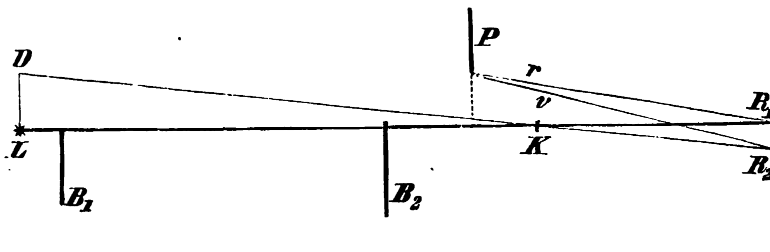


Fig. 69.

accommodirten Auges, LD das Spectrum, B_1 der erste, B_2 der zweite Schirm, P die Pupille und $R_1 R_2$ das auf der Retina entworfene Spectrum, so ist $KR_1 = 15{,}0^{mm}$ und somit der Durchmesser des Spectrums gleich $15.0{,}004 = 0{,}060^{mm}$. A. Matthiessen (Compt. rend. XXIV. 875) hat dieselbe Grösse der Dispersion auf anderem Wege gefunden, indem er den gegenseitigen Abstand der Hauptbrennpuncte für rothes und violettes Licht beobachtete. In einem Auge von dem Dispersionsvermögen des destillirten Wassers würde die Breite des Spectrums auf der Retina nur $0{,}043^{mm}$ betragen. Durch den beschriebenen Versuch wird man zugleich darüber belehrt, dass der zweite Brennpunct der violetten Strahlen vor dem der rothen liegt, indem der von der Lichtquelle abgewendete Rand des Spectrums violett erscheint.

Um nun die Grösse der Zerstreuungsbänder oder Zerstreuungskreise für ein schematisches Auge berechnen zu können, bedarf es der Kenntniss des Dispersionsvermögens der Augenmedien.

Ueber die absoluten und partiellen Dispersionen des Lichtes in den beiden flüssigen Augenmedien besitzen wir bis jetzt nur Messungen von Cyon an Ochsen- und Kaninchenaugen.*) Wir setzen nur die ersteren her, weil sie bei Kaninchenaugen nur am Glaskörper gemessen sind. Die Bezeichnungen der Spectrallinien sind die von Fraunhofer und van der Willigen. Die letzte Columne enthält das Mittel der Indices von destillirtem Wasser aus acht Beobachtungsreihen von van der Willigen (Archive d. Mus. Teyler I. II).

Linien	Hum. aqu.	Hum. vitr.	Dest. Wasser 21,4° C.
$A - 1^{\alpha}$	—	—	1,32886
$a - 3^{\alpha}$	—	1,33197	1,32968
$B - 4^{\alpha}$	1,33286	1,33291	1,33033
$C - 5$	1,33470	1,33345	1,33105
$D - 14^{\alpha\gamma}$	1,33532	1,33586	1,33289
$E - 22^{\alpha}$	1,33759	1,33780	1,33511
$b - {}^{26}/_{27}{}^{\beta}$	—	1,33795	1,33554
$F - 34$	1,33950	1,33972	1,33701
$G - 40$	1,34297	1,34335	1,34047
$H_1 - 51^{\alpha}$	1,34543	1,34585	1,34338
$H_1 - B$	0,01257	0,01294	0,01305

Hiernach ist also das Brechungsvermögen des Glaskörpers etwas grösser als das des Kammerwassers, wogegen Fleischer und Hirschberg das Umgekehrte finden. Die Messungen von Cyon sind freilich nicht frei von Fehler, wie weiter unten gezeigt werden soll. Wir können deshalb auch annehmen, dass die Totaldispersion $H_1 - B$ der beiden flüssigen Augenmedien der des Wassers nahezu gleich und gleich 0,01300 zu setzen sei. Wahrscheinlich ist sie etwas grösser, nämlich 0,01312. Da die Indices $D - E$ beim Ochsenauge im Durchschnitt den Werth 1,33664 ergeben, so wird man diese Verhältnisse auch auf das menschliche Auge übertragen dürfen.

Es bleibt noch übrig die Zuverlässigkeit der mitgetheilten Reihen bezüglich der *partiellen Dispersionen* zu prüfen. Unter partiellen Dispersionen versteht man die Differenzen der auf einander folgenden Indices, also $a - A$, $B - a$, ... Dividirt man dieselben durch die Totaldispersion $H_1 - B$, so erhält man die *relativen Dispersionen*. Diese sind von den totalen ziemlich unabhängig. Im Allgemeinen

*) E. Cyon. Die Brechungsquotienten des Glaskörpers und des Humor aqueus. Sitzungsber. der Wiener Acad. Bd. 59. Carl, Repert. d. Experimentalphys. V. 56.

aber nimmt die relative Dispersion im Blau mit der Totaldispersion zu. Nur der Flussspath macht eine Ausnahme. In einer eingehenden Abhandlung*) habe ich Normalreihen der relativen Dispersionen im sichtbaren Spectrum als Criterium der Zuverlässigkeit von Messungen optischer Constanten nach ungefähr 250 Dispersionsreihen von verschiedenen Physikern zusammengestellt. Diese Normalreihen werden uns zur Prüfung der Zuverlässigkeit der mitgetheilten Reihen dienen können. Die Normaltabelle ist nach den relativen Dispersionen im Blau geordnet, woraus wir einige der ersten Reihen, wohin das destillirte Wasser gehört, auswählen. Am Schlusse fügen wir zur Vergleichung die Cyon'schen Zahlen hinzu.

$\frac{H_1 - F}{H_1 - B}$	$\frac{a - A}{H_1 - B}$	$\frac{B - a}{H_1 - B}$	$\frac{C - B}{H_1 - B}$	$\frac{D - C}{H_1 - B}$	$\frac{E - D}{H_1 - B}$	$\frac{b - E}{H_1 - B}$	$\frac{F - b}{H_1 - B}$	$\frac{G - F}{H_1 - B}$	$\frac{H - G}{H_1 - B}$
I. 0,4600	0,0734	0,0611	0,0636	0,1515	0,1784	0,0341	0,1124	0,2533	0,2067
III. 0,4700	688	574	597	1472	1765	338	1128	2579	2121
V. 0,4800	644	537	562	1428	1744	337	1129	2622	2178
Wasser 0,4865	636	502	548	1418	1709	330	1131	2649	2216
VII. 0,4900	602	501	530	1385	1721	332	1132	2663	2237
XII. 0,5000	564	470	501	1342	1696	328	1133	2702	2298
XVI. 0,5100	522	439	476	1299	1669	320	1136	2737	2363
H. a. 0,4718	—	—	668	1289	1806	15	19	2760	1958
H. v. 0,4736	—	727	417	1862	1499	116	1368	2805	1931

Dass den beiden Reihen viele Fehler anhaften, sieht man wol auf den ersten Blick, indem man sie untereinander und mit den Normalreihen vergleicht. Aus dem Mittel 0,4727 der relativen Dispersion im Blau darf man indessen wol schliessen, dass die beiden Flüssigkeiten in ihrem optischen Verhalten dem des Wassers sehr nahe stehen. Der Mittelwerth 0,4724 entspricht ungefähr dem zweiprocentigen Schwefelsäurehydrat. Die Reihe I und III entsprechen der Kalialaunlösung und der Schwefelsäure, die Reihe V der stark verdünnten Schwefelsäure, die Reihe VII dem Topas (β) und schwachen Salzlösungen, die Reihe XII dem Glycerin. In diesen und allen übrigen Reihen bis zur Reihe XL (0,6100), welche dem Cassiaöl und Phosphor entspricht, erkennt man ein Gesetz der continuirlichen Aenderung der relativen Dispersionen. Wir können deshalb unter der Annahme, dass die Dispersion der Augenflüssigkeiten im Blau mit der des dest. Wassers nahe übereinstimme, die wahrscheinlichsten Werthe der Indices berechnen. Wir setzen dabei die Indices der Linie E als genau voraus und als Totaldispersion den Werth 0,01300.

*) Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrg XX. 1875. S. 334.

Ochsenauge.

Farbe	Hum. aqu.	Hum. vitr.	v. d. W.	Fraunh.
$A - 1^{\alpha}$	1,33134	1,33155	83	—
$a - 3^{\alpha}$	1,33217	1,33238	65	—
$B - 4^{\alpha}$	1,33282	1,33303	71	75
$C - 5$	1,33353	1,33374	184	186
$D - 14^{\alpha\gamma}$	1,33537	1,33558	222	227
$E - 22^{\alpha}$	1,33759	1,33780	43	194
$b - 27^{\beta}$	1,33802	1,33823	147	
$F - 34$	1,33949	1,33970	344	348
$G - 40$	1,34293	1,34314	289	289
$H_1 - 51^{\alpha}$	1,34582	1,34603		

Diese Indices dürfen bei bestimmter Temperatur als auf fünf Decimalen genau angesehen werden. Wir können dieselben nun leicht auf die Brechungsindices des menschlichen Auges übertragen. Nach Fleischer ist der Brechungsindex des Kammerwassers im Mittel 1,3373, für Glaskörper 1,3367, wenn der des reinen Wassers = 1,3340 bei 15° C. gefunden wurde. Letzteres würde der Farbe mitten zwischen D und E ziemlich entsprechen. Wir erhalten so die folgende Tabelle der Indices der Lichtbrechung in den flüssigen Medien des menschlichen Auges.

Menschliches Auge.

Farbe	Hum. aqu.	Hum. vitr.
$A - 1^{\alpha}$	1,33215	1,33145
$a - 3^{\alpha}$	1,33298	1,33228
$B - 4^{\alpha}$	1,33363	1,33293
$C - 5$	1,33434	1,33364
$D - 14^{\alpha\gamma}$	1,33618	1,33548
$E - 22^{\alpha}$	1,33840	1,33770
$b - 27^{\beta}$	1,33883	1,33813
$F - 34$	1,34030	1,33960
$G - 40$	1,34374	1,34304
$H_1 - 51^{\alpha}$	1,34663	1,34593.

Zufolge dieser Tabelle sind nun die Brechungsindices im Glaskörper

für das rothe Licht der Linie B 1,33293
„ „ violette „ „ „ G 1,34304
mithin $G - C$ 0,01011.

Für Wasser bei 18,75° C. ist nach Fraunhofer diese Dispersion gleich 0,001036, aber vermuthlich etwas zu hoch; ebenso die von ihm gefundene Totaldispersion 0,01321.

Von der Farbenzerstreuung in der Krystalllinse. Die Messungen der partiellen Dispersionen des weissen Lichtes in den die Linse zusammensetzenden Substanzen und selbst in der gemischten Linsensubstanz ist mit unüberwindlichen technischen Schwierigkeiten verbunden, da diese Substanzen nach Zerstörung der Linsenfasern fast undurchsichtig werden. An dem Abbe'schen Refractometer lassen sich zwar aus dem Drehungswinkel des Amici'schen Compensators die totalen Dispersionen annähernd bestimmen, indessen ist bei einem so geringen Unterschiede des Brechungsvermögens von Wasser und Linsensubstanz noch kaum ein Unterschied in der Totaldispersion an dem Instrumente wahrzunehmen. Bei vielen Versuchen mit destillirtem Wasser, Linsensubstanzen und mit Glycerin fand ich im Mittel § 61.

		ϑ	$H_1 - B$
destill. Wasser	$n_D = 1{,}3328$	$42^0{,}0$	0,01300
Linsensubstanz	$n_D = 1{,}3961$	$41^0{,}3$	—
Glycerin	$n_D = 1{,}4474$	$41^0{,}9$	0,01712

Wir unterlassen nicht bei dieser Gelegenheit zu bemerken, dass die von Abbe statuirte Dispersion $F - D$ der Totaldispersion proportional ist. Das Verhältniss wird aber mit zunehmender Dispersion im Blau kleiner, wie aus folgender Zusammenstellung sich ergibt:

$\frac{H_1 - F}{H_1 - B}$	$\frac{F - D}{H_1 - B}$	$\frac{G - D}{H_1 - B}$
0,4600	0,3249	0,5782
0,5000	3157	5859
0,5400	3009	5833
0,6800	2807	5700
0,6200	2551	5446

Um nun doch trotz jener Schwierigkeiten der Messungen von Brechungsindices verschiedener Farben die wahrscheinlichsten Werthe zu gewinnen, sehen wir uns um nach Substanzen, welche ein nahezu gleiches mittleres Brechungsvermögen haben, deren Totaldispersionen bekannt sind. Es sind dies die Mischungen von Glycerin und Wasser, Lösungen von Chlorcalcium, Natron, sowie Säuren und mehrere organische Verbindungen. Nach v. d. Willigen und Gladstone gibt es folgende conjugirte Werthe der mittleren Brechungsindices, der Totaldispersionen und der relativen Dispersionen im Blau:

Brechende Substanzen	n_D	$H_1 - B$	$\frac{H_1 - F}{H_1 - B}$
Glycerinhydrat 50 %	1,3924	0,0149	0,5004
„ 68 %	1,4180	0,0157	0,4987
„ 81 %	1,4347	0,0161	0,4969
Chlorcalciumhydr. 24 %	1,3965	0,0176	0,4946
„ 32 %	1,4166	0,0192	0,5016
Natronhydr. 35 %	1,4133	0,0190	0,4915
Chlorzinklösung 39 %	1,4026	0,0185	0,5076
Salzsäure	1,4111	0,0212	0,4935
Salpetersäure	1,4011	0,0218	0,5076
Amylnitrat	1,4157	0,0193	0,5233
Caprylalcool	1,4279	0,0183	0,4972
Amylalcool	1,4024	0,0162	0,5000
Amylacetat	1,3998	0,0155	0,5032
Butters. Aether	1,3888	0,0154	0,5195
Kohlens. Aether	1,3810	0,0151	0,5299
Mittel:	1,4067	0,0176	0,4977

Uebertragen wir diese Durchschnittszahlen auf die Linsensubstanz, so können wir mit einem ziemlich hohen Grade von Wahrscheinlichkeit annehmen, dass sie nahezu die Totaldispersion des wasserfreien Glycerins, sowie seine relative Dispersion im Blau besitzen müsse. Dieselben sind nach Listing und v. d. Willigen beziehungsweise nahezu gleich 0,0170 und 0,5000. Nach der Normaltabelle sind die relativen Dispersionen folgende:

$H_1 - F$	$a - A$	$B - a$	$C - B$	$D - C$	$E - D$	$b - E$	$F - b$	$G - F$	$H_1 - G$
0,5000	0,0560	0,0470	0,0501	0,1342	0,1696	0,0328	0,1133	0,2702	0,2298
4937	606	488	525	1373	1708	323	1131	2669	2267
4865	636	502	548	1418	1709	330	1131	2649	2216

Die erste Reihe bezieht sich auf die Kernsubstanz, die dritte auf die Glaskörpersubstanz. Die zweite ist für die äusserste Corticalschicht berechnet. Aus vielen sorgfältigen Beobachtungen von v. d. Willigen (Arch. d. Mus. Teyl. I et II) geht nämlich hervor, dass für gleichartige Gemische, die Incremente der Totaldispersionen wie die der relativen Dispersionen im Blau den Incrementen der mittleren Brechungsindices proportional sind. Wir werden daraus den Schluss zu ziehen berechtigt sein, dass folgende conjugirte Werthe für die drei Substanzen gültig sind:

Brechende Substanzen	n_D	$H_1 - B$	$\frac{H_1 - F}{H_1 - B}$
Glaskörper	1,3355	0,0130	0,4875
Corticalschicht	1,3750	0,0150	0,4937
Kernsubstanz	1,4150	0,0170	0,5000

Unter der Voraussetzung, dass bei einer bestimmten Temperatur die partiellen Brechungsindices für die Fraunhofersche Linie D resp. 1,3355, 1,3750 und 1,4150 seien, wollen wir jetzt eine tabellarische Uebersicht der Brechungsindices für die zehn Fraunhoferschen Linien hersetzen.

Linien:	Glaskörper	Δ	Corticalschicht	Δ	Kernsubstanz	Δ
$A - 1^{\alpha}$	1,3314		1,3705		1,4101	
$a - 3^{\alpha}$	1,3323	9	1,3714	9	1,4111	10
$B - 4^{\alpha}$	1,3329	6	1,3721	7	1,4119	8
$C - 5$	1,3336	7	1,3729	8	1,4127	8
$D - 14^{\alpha\gamma}$	1,3355	19	1,3750	21	1,4150	23
$E - 22^{\alpha}$	1,3377	22	1,3776	26	1,4179	29
$b - {}^{26}/_{27}{}^{\beta}$	1,3381	4	1,3781	5	1,4185	6
$F - 34$	1,3396	15	1,3798	17	1,4204	19
$G - 40$	1,3430	34	1,3838	40	1,4250	46
$H_1 - 51^{\alpha}$	1,3459	29	1,3872	34	1,4289	39

Nimmt man nun an, dass für das Auge nur die Totaldispersion $G - B$ noch deutlich wahrnehmbar sei, so würden wir erhalten für

	$G - B$
Glaskörper	0,0101
Corticalschicht	0,0117
Kernsubstanz	0,0131.

Hieraus wird man dann mit Recht schliessen dürfen, dass das Auge ein im Verhältniss zu Wasser (0,0101) stärkeres Zerstreuungsvermögen besitze. Dies ergeben auch die Deductionen von A. Matthiessen aus seinen Messungen, wornach er die Längenabweichung des weissen Lichtes oder die Distanz der Brennpuncte des rothen und violetten Lichtes gleich $0{,}60^{mm}$ findet. Wir wollen nun auf analytischem Wege diese Abweichungen der verschiedenfarbigen Lichtstrahlen im Auge zu bestimmen suchen.

Von der Grösse der durch die Farbenzerstreuung im Auge erzeugten Längen- und Seitenabweichung. — Zerstreuungskreise. § 62.
Um in einem speciellen Falle die durch Dispersion des weissen Lichtes im Auge erzeugten Zerstreuungskreise oder Zerstreuungsbänder zu berechnen, wollen wir das systematische Auge mit geschichteter Linse zu Grunde legen. Wir gehen aus von dem accommodirten Auge, für welches die Cardinalpuncte bezüglich der Strahlen mittlerer Brechbarkeit in dem vorhergehenden Abschnitte bereits berechnet sind. Folgende Daten bilden die Grundlage der Rechnung:

Brechungsindex des rothen Lichtes	B	im Glaskörper . .	1,3329
„ „ blauen „	G	„ „ . .	1,3430
„ „ rothen „	B	in der Corticalschicht	1,3721
„ „ blauen „	G	„	1,3838
„ „ rothen „	B	im Kern	1,4119
„ „ blauen „	G	„	1,4250.
Krümmungshalbmesser der vordern Hornhautfläche .		r_1	$= 8{,}0^{mm}$
„ „ „ Linsenfläche .		r_2	$= 5{,}6$
„ „ hintern „		$-r_2$	$= -5{,}6$
Ort der vorderen Linsenfläche			3,2
„ „ hinteren „			7,2.

Für das Gesetz der Zunahme des Brechungsvermögens in der geschichteten Linse würden wir folgende Formeln zu Grunde legen müssen:

$$n_B = 1{,}4119 - 0{,}0398 \left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

$$n_G = 1{,}4250 - 0{,}0412 \left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

Hiernach ist

$$z_1 = \frac{0{,}0398}{1{,}4119} = 0{,}0282,$$

$$z_2 = \frac{0{,}0412}{1{,}4250} = 0{,}0289.$$

a. *Berechnung der Cardinalpuncte für die rothen Strahlen.* Wir zerlegen das schematische Auge wieder in zwei Systeme, das Hornhaut- und das Linsensystem. Die Brennweiten des ersteren sind

$$f_1 = -24{,}03, \quad \varphi_1 = 32{,}03, \quad n_1 = 1{,}3329$$
$$\alpha_{1,1} = \alpha_{2,1} = 0.$$

Nach § 54 finden wir die Brennweite der geschichteten Linse im Glaskörper in reciproker Form gleich

$$\frac{1}{\varphi_2} = \frac{4z_1 + 2(n_2 - 1)}{r_2}, \quad n_2 = \frac{1{,}3721}{1{,}3329} = 1{,}0294.$$

Setzt man die Zahlenwerthe $z_1 = 0{,}0282$, $r_2 = 5{,}6$ und $n_2 = 1{,}0294$ in die Formel ein, so erhält man

$$-f_2 = \varphi_2 = 32{,}64.$$

Nach § 54 findet man weiter

$$\alpha_{1,2} = -1{,}890, \quad \alpha_{2,2} = 1{,}890, \quad \varepsilon = 0{,}220.$$

Combiniren wir die beiden Systeme, so erhalten wir folgende dioptrische Constanten des Auges für die rothen Strahlen

$$D_1 = 3{,}2 + 1{,}89 = 5{,}09,$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{M_1} = -13{,}165, \quad \varphi = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{M_1} = 17{,}547,$$

$$\alpha_1 = -2{,}053, \quad \alpha_2 = 2{,}788.$$

Hiernach ist der Ort des ersten Hauptpunctes 2,053, der des zweiten 2,302. Dieser liegt mithin hinter dem ersten und das positive Interstitium beträgt $0{,}249^{mm}$.

b. *Berechnung der Cardinalpuncte für die blauen Strahlen.* Die Brennweiten des Hornhautsystems sind

$$f_1 = -23{,}32, \quad \varphi_1 = 31{,}32, \quad n_1 = 1{,}3430,$$
$$\alpha_{1,1} = \alpha_{2,1} = 0.$$

Ferner ist der reciproke Werth der Brennweite der geschichteten Linse im Glaskörper

$$\frac{1}{\varphi_2} = \frac{4 z_2 + 2 (n_2 - 1)}{r_2}, \quad n_2 = \frac{1{,}3838}{1{,}3430} = 1{,}0304.$$

Setzt man die Zahlenwerthe $z_2 = 0{,}0289$, $r_2 = 5{,}6$ und $n_2 = 1{,}0304$ ein, so erhält man

$$-f_2 = \varphi_2 = 31{,}50,$$
$$\alpha_{2,1} = -1{,}886, \quad \alpha_{2,2} = 1{,}886, \quad \varepsilon = 0{,}227.$$

Combiniren wir die beiden Systeme, so erhalten wir die dioptrischen Constanten des Auges für die blauen Strahlen:

$$D_1 = 3{,}2 + 1{,}886 = 5{,}086,$$
$$f = -12{,}724, \quad \varphi = 17{,}090, \quad \alpha_1 = -2{,}054, \quad \alpha_2 = 2{,}775.$$

Demnach ist der Ort des ersten Hauptpunctes 2,054, der des zweiten 2,311. Das Interstitium ist 0,257.

Es ist nun der Ort des zweiten Hauptbrennpunctes

der rothen Strahlen $n_B = 19{,}858$

der blauen Strahlen $n_G = 19{,}401$.

Daraus ergibt sich die Längenabweichung oder die Distanz des rothen vom blauen Brennpunct gleich $0{,}457^{mm}$.

Bei dem accommodationslosen Auge gehen wir von folgenden Daten aus:

Der Krümmungshalbmesser der Hornhaut	$r_1 =$	$8{,}0^{mm}$
„ „ der vorderen Linsenfläche	$r_2 =$	10,0
„ „ „ hinteren „	$r_3 =$	6,0
„ Ort der vorderen Linsenfläche	$=$	3,6
„ „ „ hinteren „	$=$	7,2.

c. *Berechnung der Cardinalpuncte für die rothen Strahlen.* Die Brennweiten des Hornhautsystems sind

$$f_1 = -24{,}03, \quad \varphi_1 = 32{,}03.$$

Der reciproke Werth der Brennweite der geschichteten Linse ist nach (149) gleich

$$\frac{1}{\varphi_2} = \left[2 z_1 + (n_2 - 1)\right] \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = 0{,}02288,$$

also

$$-f_2 = \varphi_2 = 43{,}707.$$

Es sind nun die Hauptpuncte der Linse zu berechnen. In § 55 fanden wir durch unser Integrationsverfahren, dass für die Strahlen mittlerer Brechbarkeit

$$\alpha_{1,2} = -1{,}681, \quad \alpha_{2,2} = 1{,}760, \quad \varepsilon = 0{,}079$$

sei. Erwägen wir, dass nach den numerischen Berechnungen für die accommodirte Linse die Hauptpuncte für die äusseren Strahlen des Spectrums wenig variiren und dass die Längenabweichung vorzugsweise durch die Brennweiten gegeben wird, so dürfen wir die angeführten Constanten, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, in die Rechnung einführen.

Combiniren wir die beiden Systeme, so erhalten wir folgende dioptrische Constanten des accommodationslosen Auges für die rothen Strahlen:

$$D_1 = 3{,}6 + 1{,}681 = 5{,}281,$$

$$f = -14{,}907, \quad \varphi = 19{,}870, \quad \alpha_1 = -1{,}801, \quad \alpha_2 = 3{,}245.$$

Demnach ist der Ort des ersten Hauptpunctes H_α gleich 1,801, der des zweiten 2,036 und das positive Interstitium gleich 0,235.

d. *Berechnung der Cardinalpuncte für die blauen Strahlen.* Die Brennweiten des Hornhautsystems sind

$$f_1 = -23{,}32, \quad \varphi_1 = 31{,}32.$$

Der reciproke Werth der Brennweite der geschichteten Linse ist nach (149) gleich

$$\frac{1}{\varphi_2} = [2z_2 + (n_2 - 1)]\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right),$$

wo $z_2 = 0{,}0289$, $n_2 = 1{,}0304$, $r_2 = 10$ und $r_3 = 6$ zu setzen ist. Die Rechnung ergibt

$$-f_2 = \varphi_2 = 42{,}517.$$

Nach dem Vorhergehenden ist nun weiter

$$\alpha_{1,2} = -1{,}681, \quad \alpha_{2,2} = 1{,}760.$$

Combiniren wir das Linsensystem mit dem Hornhautsystem, so erhalten wir die dioptrischen Constanten des accommodationslosen Auges für die blauen Strahlen. Es ist

$$D_1 = 5{,}281,$$

$$f = -14{,}462, \quad \varphi = 19{,}424, \quad \alpha_1 = -1{,}796, \quad \alpha_2 = 3{,}275.$$

Demnach ist der Ort des ersten Hauptpunctes H_α gleich 1,796,
- - - zweiten - H_β - 2,006,

das Interstitium positiv und gleich 0,210.

Es ergibt sich daraus weiter der Ort des zweiten Hauptbrennpunctes
der rothen Strahlen 21,906,
- blauen - 21,430

und die Längenabweichung dieser Brennpuncte gleich 0,476^{mm}.

Um nun aus diesen berechneten Zahlenwerthen die Grösse der durch Dispersion des weissen Lichtes im Auge erzeugten Zerstreuungskreise zu berechnen, folgen wir der von Helmholtz (Physiol. Opt. § 13) angegebenen Methode.

Es seien A (Fig. 70) der leuchtende Punct, $b_1 b_2$ das Linsenbild der Pupille, welches wir uns der Einfachheit wegen nebst dem Hornhautbilde in der Ebene der Pupille zusammenfallend denken, v der Brennpunct der violetten, r der der rothen Strahlen, cc die Ebene, in welcher sich die Randstrahlen des rothen Lichtkegels $b_1 b_2 r$ und die Randstrahlen des blauen Lichtkegels $b_1 b_2 v$ schneiden. Man ersieht unmittelbar aus der Figur, dass, wenn die

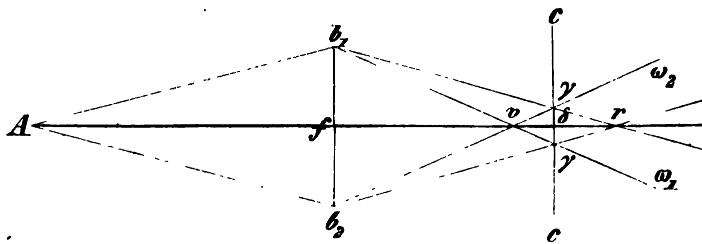


Fig. 70.

Retina vor der Ebene cc liegt, wenn also das Auge für entfernter gelegene Objecte als A accommodirt ist, es am Rande des Lichtkegels nur rothes Licht, aber in der Axe gemischtes Licht empfindet. Wenn die Retina in der Ebene cc liegt, ist das Auge accommodirt für Licht von mittlerer Brechbarkeit, welches von A kommt, und die Retina empfindet nur homogenes Licht. Es ist demnach $\gamma\gamma$ der Durchmesser des Zerstreuungskreises und bleibt auch nahezu der Durchmesser der farbigen Zerstreuungsbänder einer in A befindlichen leuchtenden Lichtlinie, wenn man parallel zu derselben durch eine geradkantige Blende die Hälfte des ganzen Lichtkegels abblendet. Man hat nun

$$\frac{\gamma\gamma}{b_1 b_2} = \frac{\delta r}{fr} = \frac{\delta v}{fv},$$

also

$$\gamma\gamma \cdot fr = b_1 b_2 \cdot \delta r$$

und

$$\gamma\gamma \cdot fv = b_1 b_2 \cdot \delta v.$$

Addirt man beide Gleichungen zu einander, so erhält man

$$\gamma\gamma\,(fr + fv) = b_1 b_2\,(\delta r + \delta v)$$
$$= b_1 b_2\,(fr - fv);$$

also endlich

$$\gamma\gamma = b_1 b_2 \frac{fr - fv}{fr + fv}.$$

Setzen wir $b_1 b_2 = 4^{mm}$ und gemäss den oben berechneten Werthen der Oerter der beiden Hauptbrennpuncte

$$fr = 21{,}906 - 3{,}6 = 18{,}306$$
$$fv = 21{,}430 - 3{,}6 = 17{,}830,$$

so ergibt die Berechnung den Werth

$$\gamma\gamma = 0{,}0527^{mm}.$$

Nach der in § 47 gegebenen ersten Tabelle für die Grösse der Durchmesser der Zerstreuungskreise von Objecten, für welche das Auge nicht accommodirt ist, würde der Durchmesser des durch Dispersion erzeugten Zerstreuungskreises ebenso gross sein, als derjenige, welchen ein in der Entfernung $1{,}25^{mm}$ befindlicher leuchtender Punct in dem accommodationslosen Auge erzeugen würde. Dass wir unter gewöhnlichen Verhältnissen die dadurch erzeugte Undeutlichkeit der Bilder von Objecten nicht bemerken, rührt, wie Helmholtz a. a. O. gezeigt hat, her von der ungleich geringen Intensität des Lichtes an den Rändern dieser Zerstreuungskreise.

§ 63. **Von der Bestimmung der Ellipticität eines Hauptmeridianes der Hornhaut und des Winkels, welchen die Gesichtslinie mit der Hornhautaxe bildet.** In dem Abschnitte über den Aplanatismus der Hornhaut ist bereits eine Anwendung gemacht von dem Theoreme, dass die Berührungscurve zweiter Ordnung eines jeden der Hauptmeridiane eine Ellipse sei. Senff und Helmholtz haben hierauf zuerst aufmerksam gemacht und das Theorem experimentell nachgewiesen. Ausgedehntere Messungen der Krümmungsradien in verschiedenen Abständen vom Scheitel der Hornhaut sind dann von Knapp und Woinow angestellt worden, welche das Theorem bestätigten. Diese Messungen wurden ausgeführt mittels des Ophthalmometers von Helmholtz, dessen Construction und Theorie in den betreffenden Werken *) nachzusehen ist. Mit dem Ophthalmometer wird in geeigneter Weise das virtuelle Bild eines in der Verlängerung des zu messenden Krümmungsradius eines beliebigen Hornhautelementes gelegenen Objectes gemessen. Nach der von Woinow (l. c. S. 53) verbesserten Methode muss jedesmal das Ophthalmometer mit dem leuchtenden Objecte dem beobachteten Auge so gegenüber gestellt werden, dass die Ophthalmometeraxe mit der Verlängerung des zu messenden Radius zusammenfällt. Dabei bleibt die Fixation des untersuchten Auges, also auch die Lage der Gesichtslinie ganz unverändert dieselbe, während nach einander das Messinstrument auf verschiedene zu beiden Seiten der Gesichtslinie gelegene homologe Puncte eines und desselben Meridians gerichtet wird. Am bequemsten sind natürlich die Messungen im horizontalen Meridian ausführbar.

Das Verfahren besteht nun im Folgenden: Die Hauptrolle spielen im Ophthalmometer zwei dicke planparallele Glasplatten von genau gleicher Beschaffenheit, welche um Axen drehbar sind, die immer parallel gestellt und senkrecht gegen die Axe des Fernrohres ge-

*) Man sehe insbesondere: Die Ophthalmometrie von Dr. Woinow. Wien 1871.

richtet sind. Dieselben sind durch ein gemeinsames Getriebe in entgegengesetzter Richtung drehbar mit gleicher Winkelgeschwindigkeit. Bei nicht senkrechter Stellung der beiden Platten gegen die Axe des Fernrohrs, also nicht paralleler Stellung der Platten gegeneinander, erleiden entferntere Gegenstände eine scheinbare Ortsveränderung, welche von dem Drehungswinkel α, der Dicke h der Platten und dem Brechungswinkel des Glases abhängig ist. Ist y_1 die lineare Grösse des gemessenen Objectes, projicirt auf die Normale der Drehungsaxe, α der Winkel der Drehung, bei welcher die entgegengesetzten Enden der beiden Bilder zur Berührung kommen, so ist

$$y_1 = 2h \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta}, \qquad (168)$$

$$n = \sin\alpha : \sin\beta .$$

Um nun weiter den Krümmungsradius irgend eines convexen Hornhautelementes zu finden, wird ein senkrecht gegen die optische Axe dieses als sphärisch zu betrachtenden Elementes gerichtetes Object angebracht, durch das in derselben Axe aufgestellte Ophthalmometer beobachtet und aus der vorstehenden Formel (168) die Grösse desselben berechnet. Die Grösse y_1 des Bildes ergibt nun nach § 12 folgendermassen die Grösse des Krümmungsradius r. Es ist

$$y_0 : y_1 = -x_0 : \tfrac{1}{2} r,$$

wo y_0 die lineare Ausdehnung des Objects, y_1 die seines Bildes, x_0 den Abstand des Objectes von der spiegelnden Fläche bezeichnen. Demgemäss ist nun

$$r = -4 \frac{x_0 h}{y_0} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta}.$$

Um nun die Elliptícität des horizontalen Meridianes zu finden, stellt man zuerst das Ophthalmometer in der Gesichtslinie des be-

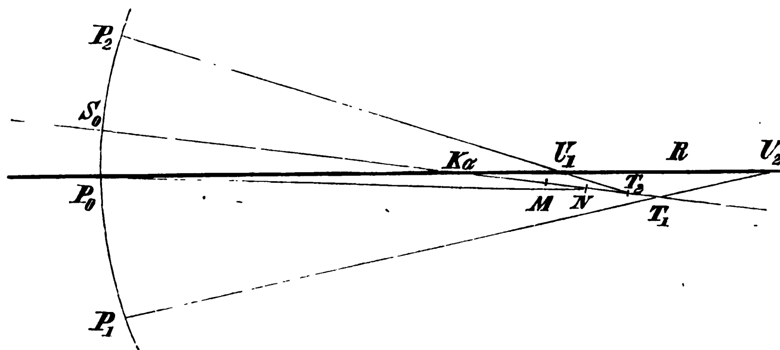


Fig. 71.

obachteten Auges auf, welches während der Messungen auf eine bestimmte Entfernung accommodirt bleiben muss. Die Gesichtslinie

bildet bei allen Augen mit der Hauptaxe des elliptischen Meridians einen individuell verschiedenen kleinen Winkel α, welcher sich später aus der Berechnung ergeben wird.

Die Gesichtslinie des gemessenen Auges sei OR (Fig. 71), S_0 der Hornhautscheitel, M sein Krümmungsmittelpunct, K_α der erste Knotenpunct des Auges bei der Accommodation für eine gewisse Entfernung, z. B. 2000^{mm}. Nun ist der Ort des Knotenpunctes nach Helmholtz schematischem Auge bei der Accommodation für die Ferne ungefähr $7{,}0^{mm}$ und nach der Deduction im vorhergehenden Abschnitte der Krümmungsradius r_0 oder S_0M des Hornhautscheitels gleich $7{,}6^{mm}$, mithin weicht die Normale des Punctes P_0 etwas nach unten von der Gesichtslinie ab und hierin liegt zum Theil ein Fehler in dem Princip der Methode. Indessen ist dieser Fehler ziemlich klein und man wird den Winkel $S_0K_\alpha P_0$ nahezu gleich P_0NS_0 gleich α setzen können. Demnach würde α auch als der Winkel betrachtet werden können, welchen die Normale P_0N des Meridianelementes mit der Hornhautaxe S_0M bildet. Es sei nun

$S_0M = \varrho$ der Krümmungsradius des Scheitels der Ellipse,
PN die Normale des Punctes P der Gesichtslinie,
P_1T_1 die Normale des Punctes P_1,
P_2T_2 die Normale des Punctes P_2.

Woinow wählte bei seinen Messungen den Winkel $P_0U_1P_1$ oder $\varphi = 20^0$, ebenso $P_0U_2P_2$ gleich 20^0 und setzte stillschweigend voraus, es liege K_α sehr nahe bei N. Unter dieser Voraussetzung wird man freilich auch noch annehmen dürfen, dass sämmtliche Puncte $K_\alpha MNT_1T_2U_1U_2$ sehr nahe beieinander liegen. Dann wäre freilich auch

$$S_0NP_0 = \alpha,\ S_0T_1P_1 = \varphi + \alpha,\ S_0T_2P_2 = \varphi - \alpha.$$

Es bleibt einstweilen nichts anderes übrig, als den Gewährsmännern Helmholtz, Knapp und Woinow zu folgen. Wir suchen jetzt die analytischen Ausdrücke der drei Krümmungsradien der Hornhaut in den Puncten $P_0P_1P_2$, indem wir die mit den Normalen P_0N, P_1T_1 und P_2T_2 zusammenfallenden Radien bezw. mit ϱ_0, ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnen.

Für eine Ellipse ist nun, wenn N die Normale bezeichnet, a die grosse Axe, b die kleine, ε die numerische Excentricität,

$$\varrho_0 = \frac{b^2}{a}\left(\frac{Na}{b^2}\right)^3 = \frac{b^2}{a}\sqrt{1 + \varepsilon^2\frac{N^2a^2}{b^4}\sin\alpha^2}^3.$$

Drückt man N durch ϱ_0 aus und substituirt dies in dem letzten Ausdrucke, so erhält man

$$\varrho_0 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\alpha^2}^3}.$$

Analog erhält man für die beiden andern Radien

$$\varrho_1 = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin{(\varphi + \alpha)}^2}^3},$$

$$\varrho_2 = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin{(\varphi - \alpha)}^2}^3}.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich mittels der bekannten und gemessenen Grössen φ, ϱ_0, ϱ_1 und ϱ_2 die drei Unbekannten a, ε und α berechnen.

Wir eliminiren zunächst die Grösse a und darauf das Quadrat ε^2 der Excentricität. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\varrho_0^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}\,(1 - \varepsilon^2)^{\frac{2}{3}}}{1 - \varepsilon^2 \sin \alpha^2},$$

aus der zweiten

$$\varrho_1^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}\,(1 - \varepsilon^2)^{\frac{2}{3}}}{1 - \varepsilon^2 \sin{(\varphi + \alpha)}^2}.$$

Subtrahirt man die mit den Divisoren der Quotienten multiplicirten Gleichungen von einander, so resultirt

$$\varepsilon^2 = \frac{\varrho_0^{\frac{2}{3}} - \varrho_1^{\frac{2}{3}}}{\varrho_0^{\frac{2}{3}} \sin \alpha^2 - \varrho_1^{\frac{2}{3}} \sin{(\varphi + \alpha)}^2}.$$

Auf analoge Weise folgt aus der ersten und dritten Gleichung

$$\varepsilon^2 = \frac{\varrho_0^{\frac{2}{3}} - \varrho_2^{\frac{2}{3}}}{\varrho_0^{\frac{2}{3}} \sin \alpha^2 - \varrho_2^{\frac{2}{3}} \sin{(\varphi - \alpha)}^2}.$$

Es lässt sich nun mittels dieser beiden Gleichungen ε^2 eliminiren und der Winkel α aus der Finalgleichung berechnen. Substituirt man

$$A \text{ für } (\varrho_0 \varrho_1)^{\frac{2}{3}},\; B \text{ für } (\varrho_0 \varrho_2)^{\frac{2}{3}},\; C \text{ für } (\varrho_1 \varrho_2)^{\frac{2}{3}},$$

so ergibt sich nach einigen Umwandlungen

$$A\,[\sin{(\varphi + \alpha)}^2 - \sin \alpha^2] + B\,[\sin \alpha^2 - \sin{(\varphi - \alpha)}^2] = C\,[\sin{(\varphi + \alpha)}^2 - \sin{(\varphi - \alpha)}^2].$$

Durch Anwendung der trigonometrischen Formel

$$\sin x^2 - \sin y^2 = \sin{(x + y)} \sin{(x - y)}$$

erhält man weiter

$$A \sin{(2\alpha + \varphi)} \sin \varphi + B \sin{(2\alpha - \varphi)} \sin \varphi = C \sin 2\alpha \sin 2\varphi$$

oder auch

$$A \sin 2\,(\alpha + \varphi) + B \sin 2\,(\alpha - \varphi) = 2C \sin 2\alpha \cos \varphi.$$

Löst man die Functionen der Winkel-Summen und Differenzen auf, so wird daraus

$$A\,(\tan 2\alpha + \tan \varphi) + B\,(\tan 2\alpha - \tan \varphi) = 2C \tan 2\alpha$$

oder endlich

$$\tan 2\alpha = \frac{B - A}{A + B - 2C} \tan \varphi.$$

Führt man die Radien wieder ein, so ist nun

$$\tan 2\alpha = \tan \varphi \frac{\left[(\varrho_0 \varrho_2)^{\frac{2}{3}} - (\varrho_0 \varrho_1)^{\frac{2}{3}}\right]}{(\varrho_0 \varrho_1)^{\frac{2}{3}} + (\varrho_0 \varrho_2)^{\frac{2}{3}} - 2\,(\varrho_1 \varrho_2)^{\frac{2}{3}}}. \qquad (169)$$

Diese Gleichung liefert den Werth von α. Eine der Gleichungen in ε^2 gibt diesen Werth und aus der ersten der drei ursprünglichen Gleichungen folgt

$$a = \varrho_0 \frac{(1 - \varepsilon^2 \sin \alpha^2)^{3/2}}{1 - \varepsilon^2}, \qquad (170)$$

woraus man a, d. i. die halbe grosse Axe, berechnet. Nun ist aber

$$\varrho_0 = a\,(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a},$$

d. i. der Krümmungsradius in dem Hornhaut- oder dem Ellipsen-Scheitel. Es sind somit alle Elemente der Ellipticität bestimmt.

Man kann nun zwar, wie schon bemerkt, die Messungsmethode nicht als fehlerfrei bezeichnen; erzielt aber wenigstens annähernd den Werth von α. Beim Einstellen der Ophthalmometeraxe in der Gesichtslinie misst man nämlich zwei nicht genau zusammengehörige Elemente, einmal den Winkel $P_0 K_\alpha S_0$ oder α und dann den Krümmungsradius $P_0 N$. Der Winkel, welchen die Normale PN mit der Hornhautaxe bildet, ist also in Wirklichkeit kleiner als α, weil der Abstand des ersten Knotenpunctes von der Hornhaut kleiner ist, als der Krümmungsradius der Hornhaut. Unter der Voraussetzung, dass das ganze dioptrische System völlig centrirt sei, ist der erste Knotenpunct K_α in den Durchschnittspunct der optischen Axe $S_0 M$ mit der Gesichtslinie OR zu verlegen.

Kennt man die Lage der Hornhautaxe bei dem individuellen Auge annähernd, so wird man jene principiellen Fehler der Messungen vermeiden können, indem man die Messungen in der Weise wiederholt, dass man die gefundene hypothetische Axe als Ausgangspunct wählt und beiderseits abermals gleiche Winkelabstände φ nimmt. Auf diese Weise findet man die Correction $\Delta \alpha_1$ und den wahren Werth von α genauer gleich $\alpha_1 + \Delta \alpha_1$. Es lässt sich nicht läugnen, dass dies Verfahren ein wenig zeitraubend ist. Für die Dioptrik des menschlichen Auges scheint es aber von grösster Wichtigkeit zu sein, nunmehr an gesunden Augen genau die geometrischen Verhältnisse einer normalen Hornhaut festzustellen.

§ 64. **Von der Messung der Convexität der Vorderfläche der Krystalllinse.** Die Vorderfläche der Linse kann ebenfalls als ein convexer sphärischer Spiegel betrachtet werden, vor welchem Kammerwasser und hinter welchem die stärker brechende also spiegelnde Linsenkapsel liegt. Die beiden Brechungsindices sind bezw. $n_1 = 1{,}3365$ und $n_2 = 1{,}3750$. Die Vorderfläche entwirft wegen ihrer nach vorne

gerichteten Convexität von äusseren Objecten aufrechte virtuelle Bilder hinter derselben. Sie haben jedoch wegen des davorliegenden Hornhautsystems eine andere scheinbare Grösse, als wenn wir sie vom Kammerwasser aus betrachten würden. Wir haben es hier also mit einem sogenannten dioptrisch-katoptrischen Systeme zu thun, zu dessen analytischer Untersuchung die Kenntniss der dioptrischen Elemente des voranliegenden Systems nothwendig ist. Es müssen die Krümmung der Vorderfläche der Hornhaut, das Brechungsvermögen und die Tiefe des Kammerwassers vorher gemessen sein.

Die von Helmholtz und Knapp angewandte Methode, die scheinbare lineare Grösse der Bilder der an der Vorderfläche der Linse gespiegelten äusseren Objecte zu messen, bestand darin, dass sie die Grösse der Bilder verglichen mit der Grösse der Hornhautbilder oder genauer darin, dass sie die absolute Grösse der Objecte so lange gegen einander veränderten, bis die Grössen der Bilder einander gleich wurden. Das Helmholtz'sche Verfahren mit der Anwendung eines horizontalen Spiegels, in welches das beobachtete Auge schaut, um zwei gleiche über einander gelegene Bilder von Objecten, bestehend in erleuchteten quadratischen Oeffnungen, auf Hornhaut und Linse zu entwerfen, wurde später von Woinow mit der Modification angewandt, dass er den horizontalen Spiegel durch ein dünnes Glasprisma mit horizontaler brechender Kante ersetzte. Ausserdem wendete er zur Messung der Distanzen der Bilder (der Bildgrösse) des Ophthalmometer an; jedoch so, dass nun die Axe der Glasplatten horizontal gestellt wurde.

In dem Ophthalmometer erscheinen alsdann durch Verdoppelung im ganzen vier Reflexe, welche so weit gegen einander durch Drehung der Glasplatten verschoben werden, bis drei Reflexe mit zwei gleichweiten Zwischenräumen entstehen. In der Formel (168) nämlich

$$y_1 = 2h \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

ist alsdann y_1 als die scheinbare Grösse des Spiegelbildes anzusehen.

Sind nun y_0 und η_0 die Grössen zweier sehr entfernter Objecte, r_1 und r_2 die doppelten Brennweiten zweier Spiegel, y_1 und η_1 die Bildgrössen, x_0 der gleiche Abstand der Objecte von den Spiegeln, so ist

$$y_0 : y_1 = x_0 : \tfrac{1}{2} r_1,$$

$$\eta_0 : \eta_1 = x_0 : \tfrac{1}{2} r_2,$$

folglich

$$\frac{\eta_0 y_1}{\eta_1 y_0} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Wenn nun noch y_1 und η_1 einander gleich gemacht werden, so ist

$$\eta_0 : y_0 = r_1 : r_2.$$

Demnach verhalten sich die Brennweiten der Spiegel umgekehrt, wie die Grössen der leuchtenden Objecte.

Es ist nun r_1 der bekannte Krümmungsradius oder die doppelte Brennweite der Hornhaut, r_2 der scheinbare Krümmungsradius oder die doppelte Brennweite $2q$ der Vorderfläche der Linse mit dem davor liegenden brechenden Systeme, y_0 ist das leuchtende Object für die Hornhaut und η_0 das Object für die Krystalllinse. η_0 kann direct gemessen werden und ebenso y_0. Man erhält so den scheinbaren Krümmungsradius r_2 oder die doppelte Brennweite $2q$, nämlich

$$r_2 = 2q = r_1 \frac{y_0}{\eta_0}.$$

Um den wahren Radius ϱ_2 zu erhalten, eliminiren wir zunächst r_1 mittels der vorhergehenden Formeln. Es war

$$\tfrac{1}{2} r_1 = x_0 \frac{y_1}{y_0} = x_0 \frac{\eta_1}{y_0},$$

folglich

$$r_2 = 2x_0 \frac{\eta_1}{\eta_0}. \qquad (171)$$

Die Entfernung x_0 und das Object η_0 der Linsenfläche werden hier direct durch Messung gefunden, η_1 dagegen mittels des Ophthalmometers. Der Quotient $x_0 : \eta_0$ lässt sich bei Anwendung eines dünnen Prismas annähernd durch den Winkel p desselben ausdrücken. Für das Minimum der Ablenkung ϑ_0 ist nämlich

$$\sin \tfrac{1}{2} (\vartheta + p) = n \sin \tfrac{1}{2} p,$$

und wenn der Brechungsindex des Glases gleich 1,5 angenommen wird, wegen der sehr kleinen Winkel

$$\vartheta + p = 1{,}5p$$

oder endlich

$$\vartheta = \tfrac{1}{2} p.$$

Daraus folgt

$$\frac{x_0}{\eta_0} = \cot \vartheta = \cot \tfrac{1}{2} p$$

und es ist nahezu

$$2q = r_2 = 2\eta_1 \cot \tfrac{1}{2} p. \qquad (172)$$

Die Grösse q oder die scheinbare Brennweite der Vorderfläche der Krystalllinse ist nun weiter verwendbar zur Berechnung ihrer wahren Grösse oder des halben Krümmungsradius der vordern Linsenfläche.

Wir betrachten ein beliebiges dioptrisches geschichtetes Linsensystem und nehmen an, die letzte Fläche sei spiegelnd. Wir untersuchen die scheinbare Lage der spiegelnden Fläche und des Brennpunctes dieser Fläche durch das vor ihr liegende dioptrische System betrachtet. Φ (Fig. 72) sei der zweite Hauptbrennpunct des dioptrischen Systems $S_1 S_2$, der bei A eintretende Strahl in M an der letzten Fläche S_3 reflectirt und bei B wieder nach vorne aus dem Systeme austretend. $H_\alpha H_\beta$ seien ferner die Hauptpuncte des Systems $S_1 S_2$, C das Centrum der spiegelnden Fläche, $H_2 M$ der in den

Spiegel einfallende, MH_6 der reflectirte und in der Richtung H_5B austretende Lichtstrahl. Demnach ist Φ_1 der wahre, Φ_σ der scheinbare Brennpunct der spiegelnden Fläche S_3. Wenn endlich ein von S_3 ausgehender Lichtstrahl S_3H_4 in der Richtung Σ_3H_3D aus dem

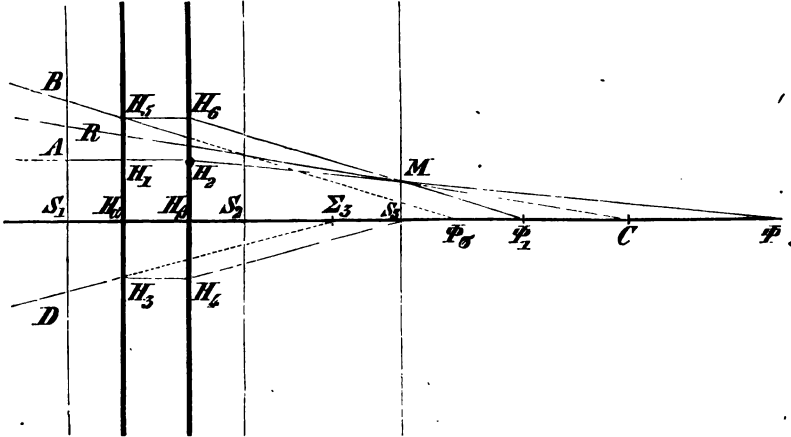


Fig. 72.

Systeme austritt, so ist Σ_3 der scheinbare Ort des Scheitels, S_3 und $\Sigma_3\Phi_\sigma$ die scheinbare Brennweite der spiegelnden Fläche, welche wir mit q oder $\frac{1}{2}r_2$ bezeichnet haben.

Um die Grösse q zu berechnen, suchen wir $H_\alpha\Phi_\sigma$ und $H_\alpha\Sigma_3$ also die Abstände der Puncte Φ_σ und Σ_3 vom ersten Hauptpuncte des dioptrischen Systems S_1S_2. Zunächst ist $H_\beta\Phi = \varphi$ die zweite Hauptbrennweite des dioptrischen Systems S_1S_2. Die Abscissenformel sei wie früher

$$\frac{f}{x_2} + \frac{\varphi}{x_3} = 1.$$

Es sei ferner Φ_1 der conjugirte katoptrische Punct von Φ und MC der Krümmungsradius ϱ der spiegelnden Fläche, welche wir uns nach vorne convex vorstellen wollen, wodurch ϱ positiv wird. Dann ist

$$< H_2MR = < H_6MR = < \Phi_1MC = < \Phi MC.$$

Bezeichnen wir wie ehedem $H_\beta\Phi_1$ mit x_3, $H_\beta S_3$ mit α, so ist gemäss § 5 für eine convexe Spiegelfläche

$$\frac{1}{\varphi - \alpha} + \frac{1}{x_3 - \alpha} = \frac{2}{\varrho},$$

wo ϱ den wirklichen Krümmungsradius der spiegelnden Fläche bezeichnet. Daraus folgt

$$x_3 - \alpha = \frac{\varrho(\varphi - \alpha)}{2(\varphi - \alpha) - \varrho}$$

und

$$x_3 = \frac{(\varphi - \alpha)(2\alpha + \varrho) - \alpha\varrho}{2(\varphi - \alpha) - \varrho}.$$

Nun ist nach dem Vorhergehenden $H_\beta \Phi_1$ gleich x_3 und es kann der Strahl $\Phi_1 M H_6$ als von hinten in das dioptrische System eintretend angesehen werden. Die Abscisse x_3 ist folglich in die Refractionsgleichung

$$\frac{f}{x_2} + \frac{\varphi}{x_3} = 1$$

einzusetzen, woraus resultirt

$$x_2 = f \frac{(\varphi - \alpha)(2\alpha + \varrho) - \alpha\varrho}{2(\varphi - \alpha)(\alpha - \varphi + \varrho)} = H_\alpha \Phi_\sigma .$$

Um $H_\alpha \Sigma_3$ zu erhalten, suchen wir den scheinbaren Ort von S_3, indem wir in der Gleichung

$$\frac{f}{x_4} + \frac{\varphi}{x_5} = 1$$

an die Stelle von x_5 setzen $H_\beta S_3 = \alpha$. Dadurch wird

$$\frac{f}{x_4} + \frac{\varphi}{\alpha} = 1$$

und

$$x_4 = f \frac{\alpha}{\alpha - \varphi} = H_\alpha \Sigma_3 .$$

Demnach ist

$$q = \tfrac{1}{2} r_2 = \Sigma_3 \Phi_\sigma = H_\alpha \Phi_\sigma - H_\alpha \Sigma_3$$

oder

$$r_2 = \frac{-f\varphi\varrho}{(\varphi - \alpha)(\varphi - \alpha - \varrho)} . \qquad (173)$$

Da f im allgemeinen negativ und bei grossen Brennweiten der Divisor wesentlich positiv ist, so haben r_2 und ϱ gleiche Vorzeichen, also das Vorzeichen $+$ für die vordere, das Vorzeichen $-$ für die hintere Linsenfläche. Stellt man die Berechnung für die hintere Linsenfläche an, so haben die Brennweiten f und φ des voranliegenden dioptrischen Systems natürlich andere Werthe.

Wir finden nun r_2 durch directe Messung mittels des Ophthalmometers aus (171), nämlich

$$r_2 = 2 x_0 \frac{\eta_1}{\eta_0} ,$$

und ϱ, indem wir die Gleichung (173) nach ϱ auflösen. Man findet leicht

$$\varrho = \frac{r_2 (\varphi - \alpha)^2}{f\varphi + r_2 (\varphi - \alpha)} . \qquad (174)$$

Auf diese Weise ist der wahre Krümmungshalbmesser der spiegelnden Fläche bestimmt. Wenn nun weiter die Dicke der nächstfolgenden Schicht, so wie ihr Brechungsvermögen bekannt ist, so kann auf dieselbe Weise zur Messung der Krümmung einer nächstfolgenden sphärischen Fläche fortgeschritten werden. Die hier abgeleiteten Formeln können auch noch auf einem andern Wege gewonnen werden, indem man die Verhältnisse der Object- und Bildgrössen bestimmt, wie jetzt gezeigt werden soll.

Directe Berechnung der Grössenverhältnisse von dem Objecte und seinen Bildern in einem dioptrisch-katoptrischen Systeme. § 65. Eliminiren wir aus den beiden Gleichungen (171) und (174) die Grösse r_2, so erhalten wir

$$\frac{\eta_0}{\eta_1} = -\frac{2x_0(\varphi-\alpha)(\varphi-\alpha-\varrho)}{f\varphi\varrho}.$$

Dies Verhältniss lässt sich direct auf folgendem Wege finden. Das dioptrisch-katoptrische System sei $S_1 S_3$ (Fig. 73), $P_0 N_0$ oder η_0 das Object, x_0 sein Abstand vom ersten Hauptpuncte H_α des Systems $S_1 S_2$, Φ der zweite Hauptbrennpunct, $P_1 N_1$ das dioptrische Bild y_1, A das erste katoptrische Bild y_2, B das katoptrisch-dioptrische Bild, welches identisch ist mit η_0. Endlich sei Σ_3 der scheinbare Ort von S_3, also $\Sigma_3 B$ scheinbare Brennweite.

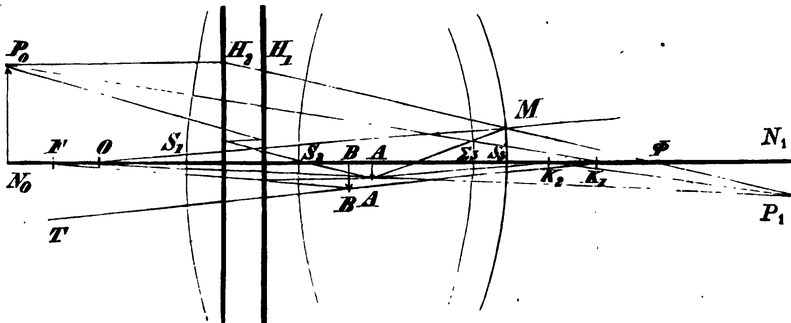


Fig. 73.

Um einen concreten Fall zu behandeln, möge S_1 den Scheitel der Hornhaut des menschlichen Auges, S_2 den Scheitel der vorderen, S_3 den Scheitel der hinteren Linsenfläche bedeuten. Es hat alsdann ϱ einen negativen Werth und das Interstitium $H_\alpha H_\beta$ der beiden Hauptpuncte ist negativ, so dass H_β vor H_α, H_2 vor H_1 u. s. w. liegt. Dasselbe wird dann auch für die beiden Knotenpuncte K_1 und K_2 der Fall sein. Das scheinbare Bild B eines Punctes P_0 liegt dann an der entgegengesetzten Seite der optischen Axe und zwar ungefähr 1^{mm} hinter der vorderen Linsenfläche. O sei der Krümmungsmittelpunct der hinteren Linsenfläche, welche das erste katoptrische Bild von P_0 entwirft und F der erste Hauptbrennpunct des Systems $S_1 S_2$, vor welchem Luft und hinter welchem Linsensubstanz liegt.

Die Abscissengleichung ist wiederum

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

und $H_\beta N_1$ oder die Entfernung des ersten dioptrischen Bildes y_1 gleich

$$x_1 = \frac{\varphi x_0}{x_0 - f}.$$

Ist das Object weit genug entfernt, so kann man, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, annehmen es sei $x_1 = \varphi$.

Das erste katoptrische Bild von dem virtuellen Bilde $N_1 P_1$ ist nun A oder mit anderen Worten y_2 ist das Spiegelbild von y_1 und beide verhalten sich ihrer Grösse nach zueinander, wie ihre Entfernungen vom Spiegel S_3; also, indem wir $H_\beta S_3$ mit α und $H_\beta A$ mit x_3 bezeichnen,

$$y_1 : y_2 = (\varphi - \alpha) : (x_3 - \alpha).$$

Es ist nun weiter für eine concave Spiegelfläche der Radius ϱ negativ und

$$\frac{1}{\varphi - \alpha} + \frac{1}{x_3 - \alpha} = \frac{2}{\varrho},$$

also

$$x_3 = \frac{(\varphi - \alpha)(2\alpha + \varrho) - \alpha\varrho}{2(\varphi - \alpha) - \varrho}.$$

Wir erhalten auf diese Weise folgende Verhältnissgleichungen für die Ordinaten $P_0 N_0 = \eta_0$, $P_1 N_1 = y_1$, $A = y_2$ und $B = \eta_1$:

$$\frac{\eta_0}{y_1} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{-x_0}{f},$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{2(\varphi - \alpha) - \varrho}{\varrho},$$

$$\frac{y_2}{\eta_1} = \frac{\varphi - x_3}{\varphi}.$$

Setzen wir den Werth von x_3 in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{y_2}{\eta_1} = \frac{2(\varphi - \alpha)(\varphi - \alpha - \varrho)}{\varphi[2(\varphi - \alpha) - \varrho]}.$$

Multiplicirt man die drei Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{\eta_0}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{y_2}{\eta_1} = \frac{\eta_0}{\eta_1} = \frac{2x_0(\varphi - \alpha)(\varphi - \alpha - \varrho)}{-f\varphi\varrho}. \qquad (175)$$

Mit Hülfe von (171) gelangen wir so auf eine ebenso einfache Weise zur Formel (174).

§ 66. **Construction der Bilder, erzeugt durch die Spiegelung eines sehr entfernten Objectes an der hinteren Linsenfläche.** Wir wollen noch eine Methode angeben, wie sich Grösse und Lage der katoptrisch-dioptrischen Bilder construiren lassen. Ist wieder $P_0 N_0$ (Fig. 72) das Object vor dem Auge, so erhält man das erste dioptrische Bild $P_1 N_1$ dadurch, dass man $P_0 H_2$ parallel zur optischen Axe zieht und H_2 mit dem zweiten Hauptbrennpuncte Φ verbindet. Einen zweiten Lichtstrahl, der von P_0 nach P_1 geht, erhält man dadurch, dass man P_0 mit K_1 dem ersten Knotenpuncte verbindet und von K_2 aus mit dieser Verbindungslinie eine Parallele zieht.

Um das katoptrische Bild A zu erhalten, verbinde man P_1 mit

dem Krümmungsmittelpuncte O der spiegelnden Fläche und ziehe vom Puncte M aus den reflectirten Strahl.

Um endlich das scheinbare oder katoptrisch-dioptrische Bild B zu erhalten, verbinde man A mit dem zweiten Knotenpuncte K_2 und ziehe durch K_1 mit dieser Verbindungslinie die Parallele K_1T in der Richtung nach vorne. Ferner ziehe man durch A eine Parallele mit der optischen Axe bis zur ersten Hauptebene und verbinde den Punct der Hauptebene mit dem ersten Hauptbrennpuncte F des dioptrischen Systems. Dieser Focalstrahl und die Knotenlinie K_1T divergiren aus dem katoptrisch-dioptrischen Bilde des Objectpunctes P_0.

Das katoptrische Bild A wird durch das vor der spiegelnden Fläche liegende brechende System nach vorne gerückt und vergrössert. Das durch die Vorderfläche der Linse entworfene Spiegelbild eines entfernten Objects wird durch das davorliegende Hornhautsystem scheinbar nach hinten gerückt und vergrössert.

Numerische Berechnung der ophthalmometrischen Elemente am schematischen Auge von Listing. Um die Ideen zu fixiren, wollen wir noch an Listings schematischem Auge die Werthe der bei dem beschriebenen ophthalmometrischen Verfahren in Betracht kommenden Grössen berechnen und zwar § 67.

a. den scheinbaren Ort der Vorderfläche der Linse;

b. den scheinbaren Ort des von einem sehr entfernten leuchtenden Objecte an der Vorderfläche entworfenen Bildes;

c. die scheinbare Grösse dieses Bildes;

d. e. und f. dieselben Elemente bei der Hinterfläche.

Wir beginnen mit der Berechnung:

a. *des scheinbaren Ortes der vorderen Linsenfläche.* Die Abscissengleichung zweier conjugirter Puncte des Hornhautsystems ist

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1,$$

worin $f = -23{,}7$, $\varphi = 31{,}7$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ zu setzen ist.

Der Abstand der vorderen Linsenfläche vom zweiten Hauptpuncte (der Hornhaut) also x_1 ist gleich $4{,}0^{mm}$. Man findet daraus $x_0 = 3{,}42^{mm}$ als die scheinbare Tiefe der vorderen Augenkammer, also $H_\alpha \Sigma_2$ nach unserer angenommenen Bezeichnungsweise.

b. *Der scheinbare Ort der an der Vorderfläche gespiegelten Bilder sehr entfernter Objecte.* Die Vorderfläche ist ein Convexspiegel und die Abscissengleichung conjugirter Puncte nach § 5

$$\frac{1}{\varphi - \alpha} + \frac{1}{x_3 - \alpha} = \frac{2}{\varrho}.$$

Für sehr entfernte Objecte ist der Abstand x_1 des dioptrischen Bildes von dem zweiten Hauptpuncte des Hornhautsystems, der in dem

Hornhautscheitel liegt, nahezu gleich $\varphi = 31,7$. Das Bild y_1 liegt demnach $27,7^{mm}$ hinter der spiegelnden Fläche und $\varphi - \alpha$ ist gleich 27,7, indem der Abstand α der spiegelnden Fläche vom zweiten Hauptpuncte gleich der Tiefe der vorderen Augenkammer ist.

Es ist nun weiter $\varrho = + 10^{mm}$ und hieraus berechnet sich der Abstand des ersten katoptrischen Bildes A (Fig. 72) oder Φ_1 (Fig. 71) hinter der spiegelnden Fläche $x_3 - \alpha = 6,10^{mm}$, also $x_3 = 10,1^{mm}$. Diese Grösse führen wir in die Abscissenformel

$$\frac{f}{x_2} + \frac{\varphi}{x_3} = 1$$

des dioptrischen oder Hornhautsystems an die Stelle von x_3 ein. Es ist demzufolge $x_2 = 11,08^{mm}$ und dies ist der scheinbare Abstand des katoptrischen Bildes von der Hornhaut. Dasselbe liegt also 7^{mm} hinter der Pupillenöffnung. Helmholtz (Physiol. Opt. § 12) gibt an, dass der scheinbare Ort des ersten Linsenbildes 8 bis 12^{mm} hinter der Ebene der Pupille liege.

Direct findet man den Abstand x_2 oder $H_\alpha \Phi_\sigma$ aus der Formel

$$x_2 = -f \frac{(\varphi - \alpha)(2\alpha + \varrho) - \alpha\varrho}{2(\varphi - \alpha)(\varphi - \alpha - \varrho)} = H_\alpha \Phi_\sigma.$$

Nun fanden wir $H_\alpha \Sigma_2 = 3,42$, $H_\alpha \Phi_\sigma = 11,08$; mithin ist die scheinbare Brennweite $q = H_\alpha \Phi_\sigma - H_\alpha \Sigma_2 = \Sigma_2 \Phi_\sigma = 7,66^{mm}$. Direct berechnen wir sie aus der Formel (173), nämlich

$$q = \tfrac{1}{2} r_2 = \frac{-f\varphi\varrho}{(\varphi - \alpha)(\varphi - \alpha - \varrho)}.$$

Die Formel findet sich in Helmholtz, physiol. Opt. § 12. Indem Helmholtz von der Veränderung der Grösse $2q$ spricht, gibt er den Werth $\varphi - \alpha$ zu 28^{mm}, den andern $\varphi - \alpha - \varrho$ zu 38^{mm} an. Das Letztere soll also wol heissen 18^{mm}, da in der Formel (173) für eine convexe Fläche ϱ positiv zu nehmen ist. Nimmt man dann die Veränderung von α gleich $0,4^{mm}$ an, so ist die entsprechende Veränderung von r_2 bei constantem ϱ gleich $\frac{1}{30}$ statt $\frac{1}{40}$, wodurch allerdings in der Hauptsache nichts geändert wird, nämlich darin, dass die Verkleinerung der Bilder bei der Accommodation nur durch die vermehrte Krümmung der spiegelnden Fläche erklärt werden kann. Nach der Formel (175) ist das Verhältniss $\eta_1 : \eta_0$ nahezu proportional ϱ. Um also den Krümmungsradius ϱ der Vorderfläche zu messen, bedarf es der Kenntniss von f und φ, sowie von α. Indess genügt für α schon eine ungefähre Bestimmung.

c. *Berechnung der scheinbaren Grösse des Spiegelbildes* η_1. Hierbei ist zuerst nach der Formel in § 65 zu berechnen die Grösse des dioptrischen Bildes y_1 nach der Formel

$$\frac{\eta_0}{y_1} = \frac{f - x_0}{f}.$$

Ist $x_0 = -2000^{mm}$, so ist $\eta_0 : y_1 = -84{,}4$. Das Bild ist ein umgekehrtes. Ferner ist

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\varphi - \alpha}{x_3 - \alpha} = \frac{2(\varphi - \alpha) - \varrho}{\varrho} = -4{,}54.$$

Das Spiegelbild ist ein aufrechtes, da das Verhältniss $\eta_0 : y_2$ positiv ist. Weiter ist $x_3 = 10{,}1$, also das Verhältniss der Grösse des katoptrischen Bildes y_2 zu seiner scheinbaren Grösse η_1 gleich

$$\frac{y_2}{\eta_1} = \frac{\varphi - x_3}{\varphi} = 0{,}681.$$

Endlich berechnet man mit Hülfe von (175) das Verhältniss der Grösse des Objects η_0 zu seinem katoptrisch-dioptrischen Bilde

$$\eta_0 : \eta_1 = -84{,}4 \,.\, (-4{,}54) \,.\, 0{,}681 = 260{,}9.$$

d. *Berechnung des scheinbaren Ortes der Hinterfläche der Linse.* Die dioptrischen Elemente des vor dieser Fläche liegenden brechenden Systems bestehen aus der Hornhaut, dem Kammerwasser, der vorderen Linsenfläche und der Linsensubstanz, sind unter Zugrundelegung des Listing'schen totalen Brechungsvermögens für diese

$$f = -19{,}11, \quad \varphi = 27{,}61, \quad \alpha_1 = -0{,}667, \quad \alpha_2 = 3{,}502.$$

Daraus folgt, dass der zweite Hauptpunct H_β vor dem ersten liegt und also das Interstitium $\varepsilon = -0{,}169$ ist.

Der Abstand der hinteren Linsenfläche vom zweiten Hauptpuncte ist gleich 7,502. Dieser Werth ist in der Abscissenformel

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

an die Stelle von x_1 zu setzen. Man findet daraus $x_0 = 7{,}130$, d. i. die scheinbare Entfernung der hinteren Linsenfläche vom ersten Hauptpuncte H_α; also $H_\alpha \Sigma_3$ (Fig. 72). Der scheinbare Ort Σ_3 bezogen auf die Hornhaut ist demnach $S_1 \Sigma_3 = 7{,}8^{mm}$.

e. *Berechnung des scheinbaren Ortes des von der Hinterfläche der Linse gespiegelten Bildes eines sehr entfernten Objects.* Die Hinterfläche ist ein Concavspiegel mit einem davor gelegenen dioptrischen Systeme $S_1 S_2$. Bezeichnen wir wie früher den Abstand der spiegelnden Fläche vom zweiten Hauptpuncte, also $H_\beta S_3$ mit α, so ist jetzt

$$\frac{1}{\varphi - \alpha} + \frac{1}{x_3 - \alpha} = \frac{2}{\varrho},$$

worin $\varphi = 27{,}61$, $\alpha = 7{,}02$ und $\varrho = -6^{mm}$ zu setzen ist.

Das Bild des dioptrischen Systems liegt $20{,}11^{mm}$ hinter der spiegelnden Fläche. Der Abstand $x_3 - \alpha$ des ersten katoptrischen Bildes von der spiegelnden Fläche ist demnach gleich $-2{,}61^{mm}$ und sein Ort bezogen auf die Hornhaut 5,39. Der Abstand x_3 des Spiegelbildes vom zweiten Hauptpunct H_β ist gleich $4{,}89^{mm}$ und in der Abscissenformel

$$\frac{f}{x_2} + \frac{\varphi}{x_3} = 1$$

einzusetzen, woraus man berechnet $x_2 = 4{,}113$. Denselben Werth behält man direct aus der Formel für $H_\alpha \Phi_\sigma$. Es ist der scheinbare Abstand des Spiegelbildes vom ersten Hauptpuncte. Der scheinbare Ort bezüglich der Hornhaut ist gleich $4{,}78^{mm}$, er liegt $0{,}78^{mm}$ hinter der vorderen Linsenfläche und erscheint also das Spiegelbild A bis B um $0{,}61^{mm}$ nach vorne gerückt.

Es wurde nun gefunden $H_\alpha \Sigma_3 = 7{,}13$, $H_\alpha \Phi_\sigma = 4{,}11$; folglich ist die scheinbare Brennweite $q = \Sigma_2 \Phi_\sigma = -3{,}02$. Direct findet man diesen Werth aus (173). Da hierin $\varphi = 27{,}61$, $\alpha = 7{,}502$, $\varrho = -6$ zu setzen ist, so genügt zur Berechnung von ϱ mittels Formel (174) ein angenäherter Werth von α. Durch Substitution von r_2 aus (171) ergibt sich

$$\varrho = 2x_0 \frac{\eta_1 (\varphi - \alpha)^2}{\eta_0 f \varphi + 2 x_0 \eta_1 (\varphi - \alpha)}.$$

f. *Die Berechnung der scheinbaren Grösse des Spiegelbildes.* Zunächst können wir die Grösse des dioptrischen Bildes y_1 von dem leuchtenden Objecte η_0 berechnen nach der Formel

$$\frac{\eta_0}{y_1} = \frac{f - x_0}{f}.$$

Nehmen wir wiederum an, es sei $x_0 = -2000^{mm}$, so wird

$$\eta_0 : y_1 = -2000 : 19{,}11 = -104{,}6.$$

Das dioptrische Bild ist ein umgekehrtes. Das Verhältniss der Grösse desselben zu seinem Spiegelbilde y_2 ist

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\varphi - \alpha}{x_3 - \alpha} = \frac{20{,}108}{2{,}61} = 7{,}70.$$

Das Spiegelbild ist ebenfalls ein umgekehrtes, da das Verhältniss $\eta_0 : y_2$ negativ ist. Der Abstand x_3 des Spiegelbildes vom zweiten Hauptpuncte ist gleich $4{,}89^{mm}$, also das Verhältniss der Grösse des katoptrischen Bildes y_2 zu seiner scheinbaren Grösse η_1 gleich

$$\frac{y_2}{\eta_1} = \frac{\varphi - x_3}{\varphi} = 0{,}823.$$

Es ist also, wie sich auch direct aus Formel (175) ergeben würde,

$$\frac{\eta_0}{\eta_1} = -104{,}6 \,.\, 7{,}70 \,.\, 0{,}823 = -663{,}0.$$

Wir haben bereits im vorhergehenden Abschnitte die scheinbare Grösse eines an der Hornhaut gespiegelten Objectes der Rechnung unterzogen. Es ergab sich hierfür gemäss Formel (171)

$$\frac{\eta_0}{\eta_1} = \frac{-x_0}{\frac{1}{2} r} = \frac{2000}{4{,}0} = 500{,}0.$$

Wir können nunmehr die drei Spiegelbilder ein und desselben Ob-

jectes η_0 der Grösse nach miteinander vergleichen. Es ist nämlich

$$\eta_1' : \eta_1'' : \eta_1''' = 8 : 15 : 6.$$

Die Messungen ergeben für den Antecedenten der fortlaufenden Proportion im Durchschnitt eine etwas grössere Zahl. Wegen der vielfachen Refraction der Lichtstrahlen innerhalb der geschichteten Linse ist die Brennweite der hinteren Linsenfläche schwer anzugeben. Die Lichtstrahlen beschreiben in Wirklichkeit Curven, welche in der Linse so verlaufen, dass dieselben an der Hinterfläche unter einem grösseren Winkel reflectirt werde, als die Berechnung mittels des imaginären Index ergeben würde. In Folge dessen liegt das katoptrische Bild näher an der spiegelnden Fläche. Das Verhältniss der Bild- und Objectgrössen wird dadurch ebenfalls geändert. In einer vollständigen Theorie dieser ophthalmometrischen Probleme ist deshalb zur Bestimmung des Weges eines Lichtstrahles innerhalb geschichteter Linsensysteme von continuirlich veränderlichem Brechungsvermögen die Einführung von Integralen ein Haupterforderniss, wie dies in einem der früheren Kapitel bereits bei der Bestimmung der Cardinalpuncte der geschichteten Krystalllinse versucht ist. Dies Problem wird der Gegenstand des Schlusskapitels sein.

Bestimmung der Trajectorie eines Lichtstrahls innerhalb der geschichteten Linse in der Nähe der optischen Axe. Zum Zwecke der Berechnung des Weges eines parallel mit der optischen Axe in die geschichtete Linse einfallenden Lichtstrahles setzen wir in einem speciellen Falle voraus, dass das Auge auf den Nahepunct accommodirt sei. Unter der weiteren Voraussetzung, dass die Linse in diesem Falle gleichseitig von den Krümmungsradien $r_1 = -r_2 = 5{,}6^{mm}$ sei und das Gesetz der optischen Dichtigkeit von Schicht zu Schicht sich durch die Gleichung (139), nämlich § 68.

$$n = 1{,}4150 - 0{,}0400\left(\frac{y}{b}\right)^2$$

darstellen lasse, fanden wir in § 54, dass im Glaskörper

a. die Brennweite φ' der Fundamentallinse ($n = 1{,}3750$) gleich 98,13,
b. - - φ'' der heterogenen Kernlinse gleich 49,05,
c. - - φ der ganzen geschichteten Linse gleich 32,71,

zu setzen sei. Weiter ergab sich aus der Berechnung, welche mit Hülfe von Integralen ausgeführt wurde, dass darnach das totale Brechungsvermögen der geschichteten Linse gleich 1,4545 oder $\frac{16}{11}$ angenommen werden müsse.

Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, dass man durch die Betrachtung der Trajectorie der Bahn des Lichtstrahles innerhalb der Linse und durch die Anwendung des von uns (§ 14) eingeführten Begriffs der falschen Brennpuncte der vorderen und hinteren Fläche

des Systems zu ganz denselben Resultaten gelangt. Diese Uebereinstimmung der Resultate kann alsdann zugleich als eine Bestätigung der Wahrscheinlichkeit der von uns angenommenen Hypothesen dienen.

Wir orientiren den Leser zunächst über den Zweck des folgenden Calcüls an der nebenstehenden Figur.

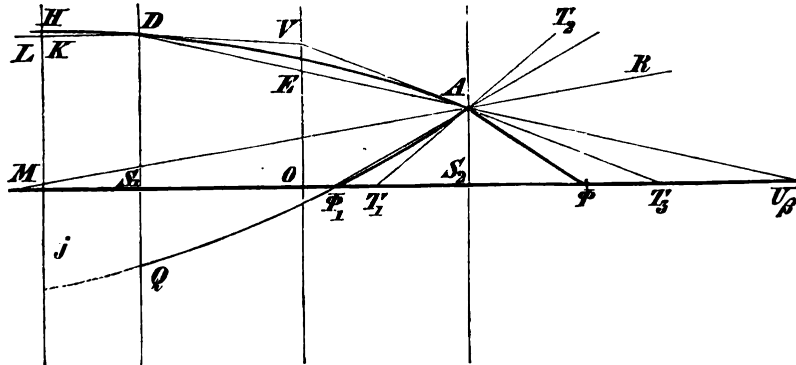


Fig. 74.

Es seien S_1 und S_2 (Fig. 74) die Scheitelpuncte der beiden Linsenflächen, LD der parallel mit der Axe einfallende Strahl. In D wird derselbe zunächst durch die Linsenkapsel gebrochen. Die Richtung des gebrochenen Strahles sei DV, welches zugleich die Tangente der Trajectorie in D sein wird. Die Trajectorie wird nun offenbar in ihrem weiteren Verlaufe gegen die optische Axe concav sein, weil die Brennweite der vorderen Linsenkapsel grösser ist als der Krümmungsradius derselben. Angenommen, die Trajectorie treffe auf die Hinterfläche der Linse in A und zwar in der Richtung VAT_3, so ist dies zugleich die Tangente der Trajectorie in A. Beim Durchgange durch die hintere Linsenfläche wird der Lichtstrahl nach dem zweitem Hauptbrennpuncte Φ der Linse gebrochen. Die Grösse dieser letzten Brechung ist wiederum nur abhängig von dem Brechungsindex und der Krümmung der hinteren Linsenkapsel; der Brechungsindex ist gleich 1,3750, also ebenso gross, wie der der vorderen Fläche. Kennen wir die optischen Elemente der beiden Linsenkapseln, so finden wir durch Berechnung leicht die Richtung von DV; ebenso die Richtung von AV aus $A\Phi$ oder umgekehrt.

Setzen wir dagegen voraus, dass die Linsensubstanz homogen sei und ein totales oder imaginäres Brechungsvermögen besitze, so werden wir die Verhältnisse auch so ansehen können, als wenn der Lichtstrahl innerhalb der Linse die gerade Bahn DAU_β beschreibe und auf dieser Bahn im Puncte A ebenfalls nach dem Hauptbrennpuncte Φ gebrochen werde. In diesem Falle ist nun U_β der sogenannte falsche Brennpunct der vorderen Linsenfläche und Φ der wahre Brennpunct der Linse. Wir werden nun nachweisen

1. dass die Trajectorie ein Parabelbogen ist, deren Scheitel ausserhalb der Linse und zwar vor ihr liegt und deren Hauptaxe senkrecht zur optischen Axe steht;
2. dass die Sehne DA der Trajectorie DA auf ein totales Brechungsvermögen führt, welches nahezu mit dem Listing-schen Werthe $\frac{16}{11}$ übereinstimmt;
3. dass wenn O das Centrum der Linse oder den mittleren Knotenpunct derselben bezeichnet, die Tangenten DV und AV sich in der Mediane OV schneiden;
4. dass die falsche Brennweite OU_β nahezu doppelt so gross ist, als die Brennweite $O\Phi$.

Bezüglich des in A von der hinteren Linsenfläche reflectirten Lichtstrahles lässt sich dann die Bestimmung der Lage des Spiegelbildes Φ_1 von einem sehr entfernten leuchtenden Puncte L in ähnlicher Weise fortsetzen. AT_1 sei die Tangente der Trajectorie des reflectirten Lichtstrahles in A, $A\Phi_1$ die Sehne derselben. Es wird dabei weiter zu untersuchen sein

5. ob die Sehnen AD und $A\Phi_1$ der beiden Zweige der Trajectorie ebenso gleiche Winkel mit dem Krümmungsradius AM bilden, wie dies für die beiden Tangenten AV und AT_1 der Fall ist.

Wir wollen zunächst die Gleichung der Trajectorie DA aufsuchen. Es sei wiederum LD (Fig. 75) ein parallel mit der optischen

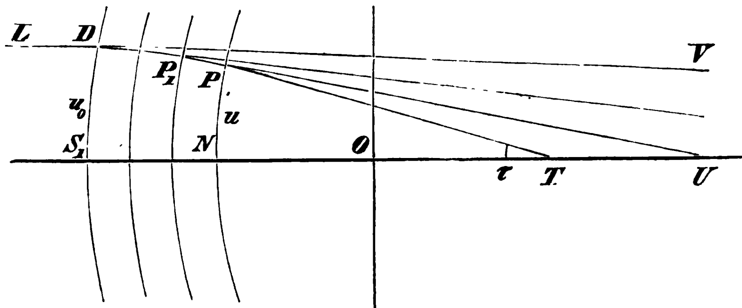


Fig. 75.

Axe aus Kammerwasser in die vordere Linsenfläche einfallender Lichtstrahl, DV die Tangente der Trajectorie in D und P irgend ein Punct derselben. Ferner sei P_1P ein Element der Trajectorie, P_1U die Richtung des Lichtstrahles nach der Brechung in P_1, PT die Richtung desselben nach der Brechung in P. Dazu sei O das Centrum der Linse, $ON = y$, $PN = u$, $DS_1 = u_0$. Ist r der Radius der Fläche PN, r_1 der Radius der Fläche DS, $OS_1 = b$, so ist nach unserer früheren auf Messungen gegründeten Annahme

$$r = r_1 \frac{y}{b},$$

und der absolute Brechungsindex der Schichten (§ 54)

$$N = N_m - a\left(\frac{y}{b}\right)^2 = N_m\left[1 - z\left(\frac{y}{b}\right)^2\right].$$

Der relative Index bezüglich des Glaskörpers ist

$$n_0 = \frac{N_m}{N_0}\left[1 - z\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]$$

und für die unendlich nahe Schicht

$$n_1 = \frac{N_m}{N_0}\left[1 - z\left(\frac{y + \partial y}{b}\right)^2\right].$$

Daraus ergibt sich das Differenzial

$$\partial n = \text{Lim}\left(\frac{n_1 - n_0}{n_0}\right) = -2z\frac{y\partial y}{b^2},$$

und gemäss (140) das Differenzial der Brennweite der vor dem Centrum gelegenen Schichten

$$\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -2z\frac{\partial y}{r_1 b}.$$

Zu dem Differenzial der Brennweite gelangt man noch durch folgende Betrachtung. Es gilt für den Punct P in der sphärischen Schicht (y) oder (r) die Relation

$$-\frac{1}{x_0} + \frac{n}{x_1} = \frac{n-1}{r}.$$

Beim Uebergange von einer beliebigen Fläche zur unendlich nahen ist $n = 1$ und $\text{Lim}\,(n-1) = \partial n$. Ferner ist PT die Tangente der Trajectorie, NT die Subtangente und an die Stelle von r ist zu setzen $-r_1\frac{y}{b}$, indem wir r_1 und b als positiv betrachten und r positiv wird für ein negatives y. Die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes P sind u und y. Für die beiden unendlich nahen Puncte P und P_1 ist $NU = x_0$, $NT = x_1$, $TU = x_0 - x_1$.

Ist $x_0 > r$, wie in unserm Falle, so ist $x_1 < x_0$ und ∂x negativ. Wir setzen demgemäss

$$\text{Lim}\,(x_0 - x_1) = -\partial x$$

und die obige Gleichung geht über in

$$\frac{\partial x}{x^2} = \frac{b}{r_1 y}\partial n = -\frac{2z}{br_1}\partial y.$$

Die Integralgleichung hiervon ist

$$-\frac{1}{x} = -\frac{2z}{br_1}y + C.$$

Um die Constante C zu bestimmen, erwägen wir, dass für $y = b$, die Brennweite x gleich S_1V, d. i. gleich der Brennweite der vorderen Linsenkapsel ist oder mit andern Worten gleich der halben Brennweite der Fundamentallinse vom Brechungsvermögen der Linsen-

kapsel. Diese ist früher mit φ' bezeichnet worden und wir erhalten demnach in diesem speciellen Falle

$$-\frac{1}{2\varphi'} = \frac{2z}{r_1} + C$$

oder in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2\varphi'} + \frac{2z}{b r_1}(b + y). \qquad (176)$$

Dies kann als der Ausdruck der Brennweite φ aller Schichtung zwischen den Grenzen $y = -b$ bis y angesehen werden. Wir können bei dem angenommenen Grade der Näherung die Brennweite vom Centrum O der Linse anrechnen, für $y = b$ wird

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2\varphi'} + \frac{4z}{r_1} = \frac{1}{OT_3}.$$

Fügen wir noch den reciproken Werth der Brennweite der hinteren Linsenkapsel hinzu, so erhalten wir in Uebereinstimmung mit den Resultaten in § 54 die gesammte Brennweite der geschichteten Linse

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi'} + \frac{4z}{r_1} = \frac{1}{O\Phi}.$$

Um die Gleichung der Trajectorie in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten, berücksichtigen wir, dass für die Subtangente die Relation

$$x = -\frac{\partial y}{\partial u} u$$

gültig ist. Durch Substitution in (176) erhalten wir

$$\frac{\partial u}{u} = -\frac{1}{2\varphi'}\partial y - \frac{2z}{b r_1}(b + y)\partial y$$

und durch Integration

$$\log(u_0 : u) = \frac{1}{2\varphi'}(b + y) + \frac{z}{b r_1}(b + y)^2.$$

Hierin ist $b + y$ gleich dem Abstande $S_1 N$. Bezeichnen wir ihn mit ν, so wird

$$\log(u_0 : u) = \frac{1}{2\varphi'}\nu + \frac{z}{b r_1}\nu^2.$$

Wir setzen ferner $u = u_0 - \omega$ und berücksichtigen, dass ω gegen u_0 immer sehr klein bleibt. Dadurch wird

$$\omega = \frac{u_0}{2\varphi'}\nu + \frac{z u_0}{b r_1}\nu^2, \qquad (177)$$

welches die Gleichung der Trajectorie in rechtwinkligen Coordinaten bezüglich des Anfangspunctes D (Fig. 73) ist; DS_1 sei Abscissenaxe, DL die Ordinatenaxe.

Nach unseren Voraussetzungen über den Zustand der geschichteten Linse ist nun nach den in § 54 angestellten Berechnungen

$$\varphi' = 98^{mm}, \ \frac{r_1}{z} = 196^{mm}$$

folglich

$$\omega = \frac{u_0}{2\varphi'}\left(\nu + \frac{\nu^2}{b}\right). \qquad (178)$$

Um die Gleichung der Trajectorie zu discutiren, wollen wir den Anfangspunct D nach vorne und oben verschieben. Diese Verschiebungen seien bezw. n und m. Schreiben wir die Gleichung in der kürzeren Form

$$\omega = p\nu + q\nu^2$$

und setzen $\omega = \xi - m$, $\nu = \eta - n$, so dient zur Bestimmung des Scheitelpunctes der Trajectorie die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu} = p + 2q\nu.$$

Im Maximum der Abscisse ξ ist

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0, \quad \nu_0 = -\frac{p}{2q}, \quad \omega_0 = -\frac{p^2}{4q}.$$

Verlegen wir den Anfangspunct der Coordinaten an diese Stelle, so ist

$$n = p : 2q, \qquad m = p^2 : 4q,$$

sowie

$$\nu = \eta - \frac{p^2}{2q}, \qquad \omega = \xi - \frac{p^2}{4q}.$$

Führen wir die neuen Coordinaten ξ und η in die Gleichung der Trajectorie ein, so ist für ξ die Richtung von oben nach unten positiv, für η von links nach rechts und die Gleichung

$$\eta^2 = \frac{1}{q}\xi = \frac{2\varphi' b}{u_0}\xi. \qquad (179)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel. Die Abstände ihres Scheitels von den ursprünglichen Coordinatenaxen sind

$$n = \frac{p}{2q} = \tfrac{1}{2}b, \quad m = \frac{p^2}{4q} = \frac{b u_0}{8\varphi'}.$$

Ist HJ die Axe der Parabel, so ist

$$KD = \tfrac{1}{2}b = S_1 O, \ HK = m.$$

Die Parabel oder die Trajectorie wird eine Gerade für u_0 gleich Null; sie fällt mit der optischen Axe zusammen.

Für irgend einen Punct P ist nun die trigonometrische Tangente

$$\tan \tau = \frac{\partial \omega}{\partial \nu} = \frac{u_0}{2\varphi'}\left(1 + \frac{2\nu}{b}\right).$$

Wir finden hieraus die Tangente des Winkels AT_3S_2, wenn wir $\nu = 2b$ setzen. Das gibt

$$\tan AT_3S_2 = \frac{5u_0}{2\varphi'}.$$

Da φ' sehr gross gegen u_0 ist, so kann man setzen

$$< AT_3S_2 = \frac{5u_0}{2\varphi'} .$$

Bezeichnen wir die Ordinate AS_2 mit u_1 und den zugehörigen Werth von ω mit ω_1, so ist gemäss (178)

$$u_1 = u_0 - \omega_1 = u_0 \left(1 - \frac{3b}{\varphi'}\right) .$$

Da also u_1 von u_0 sehr wenig abweicht und zugleich AM (Fig. 73) oder r_1 sehr gross gegen u_1 ist, so ergibt sich weiter

$$< AMS_2 = \frac{u_0}{r_1}$$

und durch Addition von AT_3S_2

$$< RAT_3 = \frac{u_0}{r_1} + \frac{5u_0}{2\varphi'} .$$

Ausserdem sind die vier Winkel RAT_3, RAT_2, MAT_1 und MAV wegen der Reflexion des Strahles in A einander gleich.

Für die Berechnung des totalen Brechungsvermögens der geschichteten Linse kommt weiter die Kenntniss der Abstände OU_β, OT_3 und $O\Phi$ in Betracht. OU_β ist die falsche Brennweite der Vorderfläche, OT_3 die Brennweite der geschichteten Linse mit Ausschluss der hintern Linsenkapsel, $O\Phi$ die Brennweite der ganzen Linse. OU_β lässt sich mit Hülfe einer Proportion berechnen, OT_3 aus AS_2 und $O\Phi$ aus OT_3 und dem Brechungsindex der hinteren Linsenkapsel.

Zunächst gilt die Proportion

$$OU_\beta : OE = S_1S_2 : (S_1D - S_2A)$$

oder

$$OU_\beta : u_0 \left(1 - \frac{3b}{2\varphi'}\right) = 2b : \frac{3u_0b}{\varphi'} .$$

Hieraus ergibt sich

$$OU_\beta = \tfrac{2}{3}\varphi' - b.$$

Setzen wir die numerischen Werthe $\varphi' = 98$, $b = 2$ ein, so resultirt $OU_\beta = 63{,}3^{mm}$.

OT_3 berechnen wir aus S_2T_3 und AS_2. Es ist nämlich

$$\tan AT_3S_2 = AS_2 : S_2T_3,$$

oder

$$S_2T_3 = u_0\left(1 - \frac{3b}{\varphi'}\right) : \frac{5u_0}{2\varphi'} = \tfrac{2}{5}(\varphi' - 3b).$$

Folglich ist

$$OT_3 = S_2T_3 + b = \tfrac{2}{5}\varphi' - \tfrac{1}{5}b.$$

Der numerische Werth von OT_3 ist hiernach $38{,}8^{mm}$. Der oben auf einem andern Wege gefundene Werth war gleich $\tfrac{2}{5}\varphi'$ oder $39{,}2^{mm}$, also etwas grösser.

Um $O\Phi$ zu erhalten, berechnen wir die Brechung der in die hintere Linsenkapsel eindringenden Trajectorie mittels der Formel

$$-\frac{1}{x_0}+\frac{n}{x_1}=\frac{n-1}{r_1},$$

worin x_0 gleich $S_2 T_3$ oder 36,8, $r_1 = 5{,}6$ und $n = 1{,}0288$ zu setzen ist. Man findet durch Berechnung

$$S_2\Phi = x_1 = 31{,}83$$

also

$$O\Phi = S_2\Phi + b = 33{,}83.$$

Wir sind nun im Stande, sowol aus der falschen Brennweite $S_1 U_\beta$ der Vorderfläche, als aus der ganzen Brennweite φ das totale Brechungsvermögen zu berechnen.

Zunächst ist $S_1 U_\beta$ gleich $65{,}3^{mm}$. Bezeichnet n das relative Brechungsvermögen der Linsensubstanz, so ist

$$\frac{n r_1}{n-1} = 65{,}3\,, \quad n = 1{,}0937$$

folglich

$$N = 1{,}0937 \cdot 1{,}3365 = 1{,}4610.$$

Für die zweite Art der Berechnung bedienen wir uns der Formel (96), nämlich

$$\frac{n}{n-1} = \frac{\varphi D}{\alpha_2 r_1}\,.$$

Nach den Berechnungen in § 54 ist $\alpha_2 = 1{,}89$, also die Brennweite $\varphi = 33{,}72$; ausserdem $D = 4^{mm}$ und $r_1 = 5{,}6^{mm}$. Man erhält $n = 1{,}0851$ und daraus

$$N = 1{,}0851 \cdot 1{,}3365 = 1{,}4501.$$

Das Mittel aus den beiden Werthen von N ist 1,4555 oder $\frac{16}{11}$.

Es wurde weiter behauptet, dass DV und AV sich in der Mediane OE schneiden. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Erwägung, dass der Bogen AD der Trajectorie sehr flach und als ein Theil des Krümmungskreises in der Mitte des Bogens betrachtet werden darf. Der Krümmungsradius ist hier nahezu gleich dem halben Parameter der Parabel, also

$$\varrho = \frac{\varphi' b}{u_0}\,.$$

Hieraus kann man auch die Deviation δ der Trajectorie in E von der geraden Bahn berechnen. Es ist nämlich

$$\delta = \frac{b u_0}{2\varphi'}\,.$$

Nimmt man u_0 gleich der halben Pupillenweite 2^{mm} an, so beträgt die Deviation nur $0{,}02^{mm}$.

Es erübrigt noch den Verlauf der in A reflectirten Trajectorie zu verfolgen. Wir gehen wieder aus von der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial x}{x^2} = \frac{2z}{br_1} \partial y$$

indem wir zu beachten haben, dass jetzt $x_0 < r$ und $x_1 > x_0$ also ∂x positiv ist.

Die Integration ergibt

$$-\frac{1}{x} = \frac{2z}{br_1} y + C.$$

Die Betrachtungsweise bleibt nun offenbar dieselbe, wenn wir uns den zweiten Zweig der Trajectorie als von der Vorderfläche ausgehend denken. Um die Constante C zu bestimmen, erwägen wir, dass für y gleich $-b$, x gleich $S_2 T_1$ wird. Diese Länge erhalten wir durch Betrachtung der Reflexion des Strahles VAT_3 in A. Es war gefunden

$$S_2 T_3 = \tfrac{2}{5} (\varphi' - 3b) = 36{,}8.$$

Dieser Werth ist an die Stelle von x_0 zu setzen in der Abscissengleichung für die conjugirten Puncte eines Hohlspiegels

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} = -\frac{2}{r_1}.$$

Man findet durch Berechnung $x_1 = -2{,}6$ oder allgemein

$$x_1 = -\frac{2r_1(\varphi' - 3b)}{4(\varphi' - 3b) + 5r_1}.$$

Auf die Vorderfläche bezogen, würden wir x_1 positiv zu nehmen haben. Es ist alsdann

$$-\frac{1}{S_2 T_1} = -\frac{2z}{r_1} + C,$$

und wenn wir mit Hülfe dieser Gleichung C aus der Gleichung (x, y) eliminiren

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{S_2 T_1} - \frac{2z}{br_1}(b + y).$$

Da nun für die Subtangente wiederum die Gleichung

$$x = -\frac{\partial y}{\partial u} u$$

gibt, so erhalten wir durch Integration, nachdem AS_2 gleich u_1 gesetzt ist

$$\log(u_1 : u) = \frac{1}{S_2 T_1}(b + y) - \frac{z}{br_1}(b + y)^2.$$

Setzen wir $b + y = v$ sowie $u = u_1 - \omega$ und setzen weiter voraus, dass $S_1 D$, also auch AS_2 gegen r_1 und $S_2 T$ klein bleiben, so erhalten wir

$$\omega = \frac{u_1}{S_2 T} v - \frac{z u_1}{br_1} v^2.$$

Nun ist $u_1 = AS_2 = u_0 \left(1 - \frac{3b}{\varphi'}\right)$; mithin

$$\omega = \frac{u_0}{2\varphi' r_1}\left[4(\varphi' - 3b) + 5r_1\right]\nu - \frac{u_0(\varphi' - 3b)}{2\varphi'\varphi' b}\nu^2,$$

wofür mit Vernachlässigung kleiner Grössen gesetzt werden kann

$$\omega = \frac{2u_0}{r_1}\nu - \frac{u_0}{2\varphi' b}\nu^2.$$

Gedenken wir uns den Punct A wieder in die Hinterfläche verlegt, so ist A der Anfangspunct rechtwinkliger Coordinaten ω und ν, wobei ω nach unten, ν nach links positiv gerechnet werden mögen.

Zur Discussion der Gleichung (ω, ν) setzen wir der Kürze wegen

$$\omega = p\nu - q\nu^2,$$
$$\omega = \xi - m, \qquad \nu = \eta - n.$$

Zur Bestimmung des Scheitels der Trajectorie dient jetzt die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu} = p - 2q\nu.$$

Im Scheitel ist $\frac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0$, $\nu_0 = p : 2q$, $\omega_0 = p^2 : 4q$.

Verlegen wir den Anfangspunct an diese Stelle, so ist

$$n = -p : 2q, \qquad m = -p^2 : 4q,$$
$$\nu = \eta + \frac{p}{2q}, \qquad \omega = \xi + \frac{p^2}{4q}.$$

Substituiren wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, so erhalten wir

$$\eta^2 = -\frac{1}{q}\xi = -\frac{2\varphi' b}{u_0}\xi.$$

Diese Parabel ist derjenigen, welcher der erste Zweig angehört, congruent. Die Abstände ihres Scheitels werden bestimmt durch ihre Coordinaten

$$n = -\frac{p^2}{2q} = \frac{2\varphi' b}{r_1}, \quad m = -\frac{p^2}{4q} = \frac{2\varphi' b}{r_1} \cdot \frac{u_0}{r_1}.$$

Setzen wir die numerischen Werthe ein, so ist $n = 70^{mm}$, $m = 70 \cdot \frac{u_0}{r_1}$.

Der Zweig $A\Phi_1 Q$ (Fig. 73) der Trajectorie bewegt sich also nach vorne dem Scheitel der Parabel entgegen. Er schneidet die optische Axe in Φ_1 und dies wird der katoptrische Bildpunct eines sehr entfernten in der Axe liegenden leuchtenden Punctes sein. Um seine Lage auf der Axe zu bestimmen, setzen wir in der Gleichung

$$\omega = \frac{2u_0}{r_1}\nu - \frac{u_0}{2\varphi' b}\nu^2$$

u_1 an die Stelle von ω und berechnen daraus ν_1, welches der Werth von $S_2\Phi_1$ sein wird. Es ist aber

$$u_1 = u_0\left(1 - \frac{3b}{\varphi'}\right),$$

also

$$1 - \frac{3b}{\varphi'} = \frac{2v_1}{r_1} - \frac{v_1^2}{2b\varphi'},$$

oder

$$v_1^2 - \frac{4b\varphi'}{r_1} v_1 + 2b(\varphi' - 3b) = 0.$$

Löst man diese Gleichung nach v_1 auf, so erhält man annähernd

$$v_1 = \frac{2b\varphi'}{r_1} \pm \frac{2b\varphi'}{r_1} \left(1 - \frac{(\varphi' - 3b) r_1^2}{4\varphi_1^2 b}\right).$$

Das obere Vorzeichen gilt für den zweiten Durchschnitt der Trajectorie mit der optischen Axe nach vorne; das untere Vorzeichen für den Punct Φ_1. Es ist demnach

$$-S_2\Phi_1 = \frac{r_1}{2} \cdot \frac{\varphi' - 3b}{\varphi'}.$$

Dieser Ausdruck ist von u_0 unabhängig, d. h. alle Lichtstrahlen schneiden sich in Φ_1.

Setzt man die numerischen Werthe $r_1 = 5{,}6$, $\varphi' = 98$, $b = 2$ so erhält man

$$S_2\Phi_1 = -2{,}629.$$

Vorhin fanden wir $S_2T_1 = -2{,}602$. Es bleibt noch zu untersuchen, ob $< MA\Phi_1 = < MAD$ ist.

Zunächst ist

$$< MA\Phi_1 = < A\Phi_1 S_2 - < AMS_2$$

und wenn man für die sehr kleinen Winkel ihre Tangenten einsetzt,

$$< MA\Phi_1 = \frac{u_0}{\varphi' r_1} (\varphi' + 3b).$$

Weiter ist

$$< MAD = < AMS_2 + < DU_\beta S_1,$$

oder

$$< MAD = \frac{u_1}{r_1} + \frac{u_0}{2\varphi'} = \frac{u_0}{\varphi' r_1} (\varphi' - 3b + \tfrac{1}{2} r_1).$$

Da $3b = 6^{mm}$ und $\frac{1}{2} r_1 = 2{,}8^{mm}$ beträgt, so ist

$$\varphi' + 3b = 104^{mm}, \quad \varphi' - 3b + \tfrac{1}{2} r_1 = 95^{mm},$$

mithin

$$< MA\Phi_1 > < MAD.$$

Hieraus würde folgen, dass das Spiegelbild in Folge der Schichtung ein wenig näher an die hintere Linsenfläche zu liegen kommt, als aus der Anwendung eines totalen Brechungsvermögens sich ergeben würde.

Es ist auf diesen Umstand am Schlusse des vorhergehenden Abschnittes bereits hingewiesen und derselbe in einer vollständigen Theorie der ophthalmometrischen Probleme jedenfalls der Beachtung werth. Man wird indess zu einer allen Anforderungen genügenden

Lösung der hier abgehandelten Probleme erst dann gelangen können, wenn über die geometrischen und physikalischen dioptrischen Constanten eines normalen Auges umfangreiche und genaue Messungen vorliegen. Dass die Messungen der Brechungsindices der geschichteten Linsensubstanz mit dem wünschenswerthen Grade der Genauigkeit recht gut ausführbar sind und dass sich die Berechnung der Coordinalpuncte der geschichteten Krystalllinse wie die der Trajectorie eines dieselbe durchdringenden Lichtstrahles theilweise auf einfache Integrale zurückführen lässt, dürfte in der vorliegenden Schrift wol hinreichend dargethan sein.

§ 69. Litteratur.

Die umfangreichste Litteraturzusammenstellung über die physiologische Optik, speciell die Dioptrik des Auges findet sich in der ausgezeichneten Schrift von Herrn Professor H. Aubert: Grundzüge der physiologischen Optik Leipzig 1876. S. 672. (Aus dem Handbuche der gesammten Augenheilkunde, herausgegeben von A. Gräfe und Th. Sämisch. II. Bd. 2. Hälfte Cap. IX.) Dieselbe hat mir wesentliche Dienste geleistet; es blieb mir wenig übrig zu demselben hinzuzufügen. Die Ordnung nach Zeit und Inhalt ist aus dem Verzeichniss zu ersehen. Dasselbe enthält:

I. Schriften über die mathematische Theorie des Durchgangs der Lichtstrahlen durch Linsen und Linsensysteme.
II. Schriften über die Brechungsindices der Augenmedien.
III. Schriften über Ophthalmometrie.

I. Mathematische Dioptrik.

1738. *Cotes* in *Smith:* a complete System of Opticks. Cambridge 1738. II. rem. p. 76.

1757. *Euler*, Règles générales pour la construction des télescopes et microscopes de quelque nombre de verres qu'ils soient composés. Hist. de l'acad. de Berlin pour l'année 1757. Berlin 1759. p. 283; — pour l'année 1761.
— Précis d'une théorie générale de la dioptrique. Hist. de l'acad. de Paris 1765. p. 555.

1778. *Lagrange,* Sur la théorie des lunettes. Nouv. mém. de l'acad. roy. de Berlin pour l'an 1778. Berlin 1780. p. 162.
— Sur une loi générale d'Optique. Ibid. Berlin 1805. Classe mathém. p. 1—12.
— Formule de dioptrique. Misc. Soc. Taur. III. 152.

1821. *Piola,* Sulla theoria de' cannocchiali. Effemer. astron. di Milano. Milano 1821.

1830. *Möbius, A.* Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern. Crelle Journ. V. S. 113. Berlin 1830.
— Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen nebst einem Anhange dioptrischen Inhaltes. Ibid. VI. 215. Berlin 1830.
— Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hülfe von Collineations-Verwandtschaft. Ber. der Königl. Gesellsch. der Wiss. in Leipzig 1855.

1841. *Gauss,* Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1841. Separatabdruck aus den Abh. der Kön. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen I. 1838—43. Vergl. auch Gött. gel. Anz. 1841. I.
Bessel, Ueber die Grundformeln der Dioptrik. Astron. Nachr. Bd. 18. S. 37. Altona 1841.

1842. *Moser*, Ueber das Auge. Dove, Repert. der Phys. V. 289, 1837—44.
— Methode, die Brennweite und optischen Hauptpuncte von Linsen zu bestimmen. Pogg. Ann. Bd. 63. S. 39. 1844.

1844. *Encke*, de formulis dioptricis. Progr. Berlin 1844.

1845. *Listing*, Beitrag zur physiologischen Optik. Göttingen. 1845.
— Mathematische Discussion des Ganges der Lichtstrahlen im Auge. Wagner's Handwörterbuch der Physiologie. Bd. IV. S. 451. Braunschweig 1851.
— Ueber einige merkwürdige Puncte in Linsen und Linsensystemen. Pogg. Ann. Bd. 129. 1866. Astron. Nachr. LXVIII. S. 129. 1866.
— Ueber symptotische Puncte in Linsen und Linsensystemen. Pogg. Ann. Bd. 129. S. 466. 1866.

1846. *Grunert*, Optische Untersuchungen. Leipzig 1846.
— Ueber merkwürdige Puncte der Spiegel- und Linsensysteme. Grun. Arch. Bd. 47. S. 84. 1867.

1856. *v. Zehender*, Anleitung zum Studium der Dioptrik des menschlichen Auges. Erlangen 1856.

1858. *Maxwell*, On the general laws of optical instruments. Quart. Journ. pg. 233—246. London 1858.

1862. *Steiner, A.* Zur Theorie der Linsen. Königsberg 1862 u. Zürich 1865.

1864. *Zinken*, Ueber die Berechnung der Bildkrümmung bei optischen Apparaten. Pogg. Ann. Bd. 122. S. 563. 1864.

Scheffler, Die physiologische Optik. Eine Darstellung der Gesetze des Auges. Braunschweig 1864.

1866. *Müller, J.* Zur Dioptrik der Linse. Pogg. Ann. Bd. 130. S. 100. 1866.
— Die Beziehungen der Brennweite und der conjugirte Punct einer Linse durch eine neue Formel dargestellt. Pogg. Ann. Jubelband. S. 460. 1874.

Neumann, C. Die Haupt- und Brennpuncte eines Linsensystems. Elementare Darstellung der durch Gauss begründeten Theorie. Leipzig 1866.

Wüllner, Einleitung in die Dioptrik des Auges. Leipzig 1861.

Krumme, Die Brechung des Lichtes an Kugelflächen. Progr. Duisburg 1866.

Briot, Sur la réflexion et la réfraction de la lumière. Journ. Math. par Liouville. XXXI p. 305. 1866.

Levistal, Recherches d'optique géométrique. Compt. rend. LXIII. p. 458. 1866.

1867. *Helmholtz*, Die Dioptrik des Auges. Handbuch der physiol. Optik. I. Abschn. Leipzig 1867.

1869. *Gerold*, Die ophthalmologische Physik. Wien 1869.

1870. *Reusch*, Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpuncten eines Linsensystemes. Leipzig 1870.
— Reflexion und Brechung des Lichtes an sphärischen Flächen unter Voraussetzung endlicher Einfallswinkel. Pogg. Ann. Bd. 130. S. 497. 1867.

1871. *Hansen, P. A.* Untersuchung des Weges eines Lichtstrahles durch eine beliebige Anzahl brechender sphärischer Flächen. Leipzig 1871.

Lippich, Fundamentalpuncte eines Systems centrirter brechender Kugelflächen. Graz 1871.

Albrich, Harmonische Beziehungen bei der Reflexion und Refraction des Lichtes. Grun. Arch. Bd. 53. S. 151. 1871.

Toepler, Bemerkungen über die Anzahl der Fundamentalpuncte eines

beliebigen Systemes von centrirten brechenden Kugelflächen. Pogg. Ann. Bd. 142. S. 232. 1871.

1873. *v. Lang*, Zur Dioptrik eines Systemes centrirter Kugelflächen. Ber. der Akad. der Wiss. Bd. 63. S. 666. 1873. Pogg. Ann. Bd. 149. S. 353. 1873. Einl. in die theoretische Physik. S. 291—328. Braunschweig 1873.

Beck, Die Fundamentaleigenschaften der Linsensysteme in geometrischer Darstellung. Ztschr. f. Math. u. Phys. XVIII. S. 588. Leipzig 1873.

Kiesling, Die Brechung der Lichtstrahlen im Auge. Progr. Hamburg 1873.

1874. *Herrmann*, Ueber schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Linsen und eine darauf bezügliche Eigenschaft der Krystalllinse. Zürich 1874. Pogg. Ann. Bd. 153. S. 470. 1874.

1875. *Hirschberg*, Zur Dioptrik des Auges. I. Die Brechung homocentrischer paraxialer Strahlenbündel in einem beliebigen centrirten Systeme kugliger Flächen. Centralblatt für die medicinischen Wissenschaften. S. 7169. 1875.

Lissajous, Sur quelques constructions géométriques applicables aux miroirs et aux lentilles. Compt. rend. LXXIX. p. 1049. 1876.

1876. *Röthig*, Die Probleme der Brechung und Reflexion. Leipzig 1876.

II. Brechungsindices der Augenmedien.

1726. *Petit, Fr. P. du,* Mémoire sur plusieurs découvertes faites dans les yeux de l'homme, des animaux à quatre pieds etc. Mém. Par. 1726.

— Mémoire sur le cristallin de l'oeil de l'homme, des animaux à quatre pieds etc. Ibid. 1730.

1813. *Brewster, D.* A Treatise on new Philosophical Instruments. Edingburgh 1813. (On Indices p. 243).

— On the refractive power of the coats and humours of the human eye. Edinburgh philos. Trans. Vol. I. 1819.

— On the crystalline lenses of animals. Phil. Trans. 1833 and 1836.

— On doubly refracting structures in the crystalline lenses of animals after death. Ibid. 1837.

1818. *Chossat*, Mémoire sur le pouvoir réfringant des milieux de l'oeil. Ann. de chim. et de phys. T. III. pg. 217. 1818. Bibl. univers. redigée à Génève. T. IX. pg. 26. 1818.

1845. *Brücke*, Ueber das Verhalten der optischen Medien des Auges gegen Licht- und Wärmestrahlen. Müller's Arch. S. 262. 1845.

1850. *Engel*, Zur Physik des Auges. Prager Vierteljahrsschrift Bd. I. S. 152. 1850. (Man vergl. Zehender in seiner „Anleitung" u. s. w. S. 193 (44)).

1855. *W. Krause*, Die Brechungsindices der durchsichtigen Medien des menschlichen Auges. Hannover 1855.

1857. *v. Zehender*, Ueber die Brewster'sche Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten flüssiger oder weicher Substanzen. Arch. für Ophthalmologie III. S. 99. 1857.

1869. *Cyon, E.* Die Brechungsquotienten des Glaskörpers und des Humor aqueus. Sitzungsber. der Wiener Acad. Bd. 59. 1869.

1872. *Fleischer*, Neue Bestimmungen der Brechungsexponenten der durchsichtigen flüssigen Medien des Auges. Jena 1872.

Christiansen, Ueber die Bestimmung der Brechungsindices. Pogg. Ann. Bd. 143. S. 250.

1874. *Abbe*, Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens fester und flüssiger Körper. Jena 1874. Man vergleiche auch das Tagesblatt der Naturforscherversammlung in Leipzig. S. 34. 1872.

Wiedemann, Eilh. Methoden zur Bestimmung der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten und Glasplatten. Archives des sciences physiques et naturelles. T. LI. p. 340. 1874 und Pogg. Ann. Bd. 158. S. 375. 1876.

Woinow, Ueber die Brechungscoefficienten der verschiedenen Linsenschichten. Briefliche Mittheilung in den Monatsblättern für Augenheilkunde. Jahrg. XII. S. 407. 1874.

Hirschberg, Ueber Bestimmung der Brechungsindices der flüssigen Medien des menschlichen Auges. Centralbl. für die medicin. Wiss. No. 13. 1874.

— Ophthalmologische Studien. Wiesbaden 1874.

1875. *Matthiessen, L.* Ueber Normalreihen der relativen Dispersionen im sichtbaren Spectrum als Criterium der Zuverlässigkeit von Messungen optischer Constanten. Ztschrft f. Math. u. Phys. XX. S. 326. Leipzig 1875.

— Von der Berechnung des absoluten Brechungsindex des Kerncentrums der Krystalllinse aus den Dimensionen des Auges. Arch. für Ophthalmol. XXII. 1876.

1876. *Aubert*, Die Brechungsexponenten der Augenmedien. Grundzüge der physiol. Optik. § 3. S. 409. Leipzig 1876. (Separatabdruck aus dem Handbuche der gesammten Augenheilkunde, herausgegeben von A. Gräfe und Th. Sämisch. II. Bd. 2. Hälfte cap. IX.)

Terquem und *Trannin*, Neue Methode zur Bestimmung der Brechungsindices von Flüssigkeiten. Carl, Repert. der Experimentalphys. Bd. 12. S. 39. 1876.

III. Ophthalmometrie.

1723. *Petit, Fr. P. du*, Mémoire sur les yeux gelés dans lequel on détermine la grandeur des chambres qui renferment l'humeur aqueuse. Mém. Par. 1723.

— Différentes manières de connaître la grandeur des chambres de l'humeur aqueuse dans les yeux de l'homme. Ibid. 1728.

1801. *Young, Th.* On the Mechanism of the eye. Phil. Trans. Art. VI. p. 38. 1801.

1818. *Sömmering, D. W.* De oculorum hominis animaliumque sectione horizontali. Göttingen 1818.

1828. *Treviranus*, Dimensionen und strahlenbrechende Kräfte des menschl. und thier. Auges. Beitr. zur Anatomie und Physiologie der Sinneswerkzeuge des Menschen und der Thiere. Heft 1. Abschn. II. Bremen 1828.

1832. *C. Krause*, Einige Bemerkungen über den Bau und die Dimensionen des menschlichen Auges. Meckel's Archiv. Bd. VI. 1832. Pogg. Ann. Bd. 31. S. 93. 1834. Bd. 39. S. 529. 1836.

1839. *Kohlrausch*, Ueber die Messung des Radius der Vorderfläche der Hornhaut am lebenden menschlichen Auge. Isis von Oken. 1840.

1846. *Senff*, in Wagner's Handwörterbuch der Physiologie. Bd. III. Art. „Sehen" von Volkmann. S. 271. 1846.

1859. *Knapp*. Die Krümmung der Hornhaut des menschlichen Auges. Heidelberg 1859.

— Ueber die Lage und Krümmung der Oberflächen der menschlichen Krystalllinse und den Einfluss ihrer Veränderungen bei der Accommo-

dation auf die Dioptrik des Auges. Archiv f. Ophthalmol. VI. 2. S. 1. 1860. VII. 2. S. 136. 1861.

1860. *Meyerstein*, Beschreibung eines Ophthalmometers nach Helmholtz. Pogg. Ann. Bd. III. S. 415. 1860.

1861. *Donders* Astigmatismus und cylindrische Gläser. Berlin 1861.
— Die Anomalien der Refraction und Accommodation des Auges. Deutsch von Becker. Wien 1866.

1864. *Schelske*, Ueber das Verhältniss des intraoculären Druckes und der Hornhautkrümmung des Auges. Arch. für Ophthalmologie X. 2. 1864.

1865. *Mandelstamm*, Zur Ophthalmometrie. Arch. f. Ophthalm. XI. 2. S. 259. 1865.
Rosow, Zur Ophthalmometrie. Arch. f. Ophthalm. XI. 2. S. 129. 1865.

1869. *Reuss u. Woinow*, Ophthalmometrische Studien. Wien 1869.
Mauthner, Ueber den Winkel α. Klin. Monatsbl. für Augenheilkunde. S. 481. Jahrg. 1869. Wiener Medicin. Presse No. 34—37. 1869.
Strawbridge, Ophthalmometrische Messungen. Sitzungsber. der ophthalmol. Ges. Klin. Monatsbl. Stuttgart 1869.

1870. *Woinow*, Weitere Beiträge zur Kenntniss des Winkels α. Arch. f. Ophthalmol. XVI. 1. S. 255. 1870.
— Ophthalmometrie. Wien 1871.

1872. *Mandelstamm und Schöler*, Eine neue Methode zur Bestimmung der optischen Constanten des Auges. Arch. f. Ophthalmol. XVIII. 1, S. 155. 1872.

1874. *Reich*, Einige Resultate ophthalmometrischer und mikrooptometrischer Messungen. Arch. f. Ophthalmol. XX. 1, S. 207. 1874.

1874. *Bauer*, Ueber den scheinbaren Ort eines in einem dichteren durchsichtigen Medium befindlichen, sowie eines durch eine sogenannte planparallele Platte beobachteten Lichtpunctes. Pogg. Ann. Bd. 153. S. 572. 1874.
Hirschberg, Zur ophthalmometrischen Rechnung. Arch. für Augen- und Ohrenheilk. III. 2, S. 160. 1874.

1875. *Mönnich*, Untersuchungen über die scheinbare Ortsveränderung eines leuchtenden Punctes durch ein von zwei parallelen Ebenen begrenztes lichtbrechendes Medium. Rostock 1875.

1876. *Matthiessen, L.* Ueber den Aplanatismus der Hornhaut. Arch. f. Ophthalmol. XXII. 1876.

